מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר סתו התשע״ה מועד ב,יום ד, כ אדר התשע״ה 11-3-2015

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה״כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- 60+20+20=100

בהצלחה.

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & =1 \\ 3x & +3y & +4z & =4 \\ 2x & +2y & +3z & =-3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2x & +3y & +4z & =9 \\ 6x & +by & +z & =3b+1 \\ 8x & +6y & +(2b-1)z & =3b+10 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

<u>שאלה 3 (10 נקודות)</u>

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 7 & i=j & 1 \le i \le n \\ 3 & j=i-1 & 2 \le i \le n \\ 2 & j=i+1 & 1 \le i \le n-1 \\ 0 & otherwise & \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשואה Av=0.

<u>שאלה 4 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות :

$$\left\{\begin{array}{llll} (1+i)x & +(2+i)y & +(3+i)z & =1+i \\ (4+i)x & +(2+2i)y & & =4 \\ & +(2-2i)y & +(6+i)z & =3 \end{array}\right\}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב y של הפתרון של המערכת.

שאלה 5 (10 נקודות)

א. חשב את

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}}\,i\right)^{100}}{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}}$$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{1,1}=1, a_{1,2}=2, a_{1,3}=3$
ונתון

$$A^{*}=\begin{pmatrix} x & -5 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

מצא את איברי A. *A כוללת סימנים אך איננה כוללת שחלוף (כלומר חסר התהליך של A^T).

<u>שאלה 7 (10 נקודות)</u>

נתונה מטריצה $A_{6,6}$:

נגדיר מטריצה $B_{6,6}$ על ידי $B_{k,j} = kA_{7-k,7-j}$.

א. כתוב את איברי B כפונקציה של איברי A .
ב. כתוב את det(B) כפונקציה של det(A)

<u>חלק ב</u>
בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

<u>שאלה 8 (5 נקודות)</u>

תזכורת : מטריצה רבועית A נקראת סימטרית אם היא מקימת כי $A^T=A$ ונקראת אנטי סימטרית אם היא מקימת כי $A^T=-A$

אם A,B מטריצות סמטריות ומתחלפות AB=BA אז גם AB סמטרית.

נכון　　　　　　　　　　לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 9 (5 נקודות)</u>

נתונה מטריצה רבועית A בעלת מטריצה צמודה *A . נתון כי *A הפיכה אז גם A הפיכה .

נכון　　　　　　　　　　לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה מערכת משואות. יש לה k פתרונות כאשר $1<k\neq\infty$. אז צורת המדרגות חיבת להיות I.

נכון   לא נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

נתונה מערכת משואות עם מקדמים ואיברים חפשיים כולם שלמים ובעלת פתרון יחיד.
נעביר את המערכת לשדה $\mathbb{Z}_7$, אז גם כעת יש למערכת פתרון יחיד.

נכון   לא נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)
הוכח את משפט 5 הנקודות.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד

מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3S_3\to S_3]{2S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3S_3\to S_3]{2S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-4S_3\to S_2]{S_1-2S_3\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -18 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ואכן $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו נוכל לפתור את המערכת :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 6 & b & 1 & 3b+1 \\ 8 & 6 & 2b-1 & 3b+10 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & b-9 & -11 & 3b-26 \\ 0 & -6 & 2b-17 & 3b-26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(b-9)S_3+6S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & -6 & 2b-17 & 3b-26 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2\leftrightarrow S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -6 & 2b-17 & 3b-26 \\ 0 & 0 & A & B \end{pmatrix}$$

$$A=(2b-17)(b-9)-66=2b^2-35b+153-66=2b^2-35b+87=$$

$$=(b-3)(2b-29),\ B=(3b-26)(b-9)+(3b-26)6=(3b-9)(b-3).$$

עבור b=3 למערכת יש אינסוף פתרונות.   b=29/2 אין פתרון עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

$$A_6=\begin{pmatrix}7&2&0&0&0&0\\3&7&2&0&0&0\\0&3&7&2&0&0\\0&0&3&7&2&0\\0&0&0&3&7&2\\0&0&0&0&3&7\end{pmatrix}$$

נשים לב כי $\det(A_n)=7\det(A_{n-1})-6\det(A_{n-2})$ וכי $\det(A_1)=7, \det(A_2)=43$ ולכן נקבל

$$\det(A_n)=7\det(A_{n-1})-6\det(A_{n-2})\to$$

$$\det(A_n)-\det(A_{n-1})=6\left(\det(A_{n-1})-\det(A_{n-2})\right).$$

$$\det(A_2)-\det(A_1)=43-7=36.\det(A_n)-\det(A_{n-1})=6^n.$$

$$\det(A_n)=6^n+6^{n-1}+\cdots+6^2+7=$$

$$=6^n+6^{n-1}+\cdots+6^2+6+1=\frac{6^{n+1}-1}{5}$$

ה. כיון שלכל n הדטרמינט שונה מ-0 אז וקטור ה-0 הוא הפתרון היחיד של המשואה.

.
תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי עמודה ימנית ונקבל:

$$\det(A) = (3+i)(4+i)(2-2i) +$$
$$+(6+i)[(1+i)(2+2i)-(4+i)(3+i)] =$$
$$= (3+i)(8-6i+2) +$$
$$+(6+i)[(2+4i-2)-(12+7i-1)] =$$
$$= (3+i)(6-6i)+(6+i)(-11-3i) =$$
$$= (18-12i+6)+(-66-29i+3) = -39-41i$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ay, ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל:

$$\det(A_y) = (3+i)3(4+i) +$$
$$+(6+i)[4(1+i)-(1+i)(4+i)] =$$
$$= 3(12+7i-1)+(1+i)(-i) = 33+21i-i+1$$
$$= 34+20i.$$

ולכן:

$$y=\frac{\det(A_y)}{\det(A)}=\frac{34+20i.}{-39-41i}=$$

$$=\frac{(34+20i)(-39+41i)}{3202}=$$

$$=\frac{(34+20i)(-39+41i)}{3202}=$$

$$\frac{-2146+614i}{3202}.$$

כדרוש.

תשובה 5 א

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}}i\right)^{100}}{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}}=?$$

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}}i\right)^{100}=?,$$

$$S=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=1.$$

$$\tan(\alpha)=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}}}=\frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}}{\sqrt{4}}}}{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}}{\sqrt{4}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1-1/\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+1/\sqrt{2}}{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}}}=\sqrt{\frac{\sin^2(\pi/8)}{\cos^2(\pi/8)}}=$$

$$=\frac{\sin(\pi/8)}{\cos(\pi/8)}=\tan(\frac{\pi}{8})$$

ולכן

$$(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{100} = ?, S = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1,$$

$$\tan(\beta) = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1 = \tan(\frac{\pi}{4}).$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}}i = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1cis(\frac{\pi}{8}),$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1cis(\frac{\pi}{4}),$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1cis(\frac{\pi}{8})}{1cis(\frac{\pi}{4})} = cis(-\frac{\pi}{8})$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}}i\right)^{100}}{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{8}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}}i}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\right)^{100}=$$

$$=\left(cis\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right)^{100}=\left(cis\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right)^{16\cdot 6+4}=$$

$$=\left(cis\left(\frac{-\pi}{8}16\right)\right)^{6}\left(cis\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right)^{4}=1cis\left(\frac{-\pi 4}{8}\right)=$$

$$=cis\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-i$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b+3c & 2d+2e+3f \\ 5b+6c & 5e+6f \\ 8b+10c & 8e+10f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2a+4d \\ 2b & 2b+4e \\ 2c & 2c+4f \end{pmatrix}$$

מהשואת המטריצות נקבל 6 משואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות (1,1),(2,1),(3,1) נקבל את 3 המשואות :

$$2a+2b+3c=2a \rightarrow 2b+3c=0$$
$$5b+6c=2b \rightarrow 4b+6c=0$$
$$8b+10c=2c \rightarrow 8b+8c=0$$

ולכן b=c=a=0. מהמקומות (2,2),(3,2) ומהצבת b=c=0 נקבל את 2 המשואות :

$$5e+6f=2b+4e \rightarrow e+6f=0$$
$$8e+10f=2c+4f \rightarrow 8e+6f=0$$

ופתרונן הוא d=e=f=0. נציב במקום (1,2) ונקבל

$$2d+2e+3f=2a+4d \rightarrow 2a+0=0 \rightarrow 2a=0 \rightarrow a=0$$

לכן הפתרון היחיד הוא מטריצת ה-אפס.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

נשתמש בנתונים ונקבל משואות

$$c-3a=2 \to c=3a-2$$

$$b-2a=-1 \to b=2a-1$$

$$z-3x=1 \to z=3x+1$$

$$y-2x=0 \to y=2x$$

$$ay-bx=1 \to$$

$$a(2x)-(2a-1)x=x=1 \to y=2, z=4$$

$$az-cx=5 \to$$

$$a4-1(3a-2)=a+2=5 \to a=3 \to b=5, c=7$$

כדרוש.

תשובה 7

$$B=\begin{pmatrix} 6a_{6,6} & 6a_{6,5} & 6a_{6,4} & 6a_{6,3} & 6a_{6,2} & 6a_{6,1} \\ 5a_{5,6} & 5a_{5,5} & 5a_{5,4} & 5a_{5,3} & 5a_{5,2} & 5a_{5,1} \\ 4a_{4,6} & 4a_{4,5} & 4a_{4,4} & 4a_{4,3} & 4a_{4,2} & 4a_{4,1} \\ 3a_{3,6} & 3a_{3,5} & 3a_{3,4} & 3a_{3,3} & 3a_{3,2} & 3a_{3,1} \\ 2a_{2,6} & 2a_{2,5} & 2a_{2,4} & 2a_{2,3} & 2a_{2,2} & 2a_{2,1} \\ a_{1,6} & a_{1,5} & a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det(B) = 6!\det(C),$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{6,6} & a_{6,5} & a_{6,4} & a_{6,3} & a_{6,2} & a_{6,1} \\ a_{5,6} & a_{5,5} & a_{5,4} & a_{5,3} & a_{5,2} & a_{5,1} \\ a_{4,6} & a_{4,5} & a_{4,4} & a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \\ a_{3,6} & a_{3,5} & a_{3,4} & a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{2,6} & a_{2,5} & a_{2,4} & a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,6} & a_{1,5} & a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

אם נחליף עמודה i עם עמודה n+1-i נקבל מטריצה שיותר דומה ל A, ואם במטריצה המתקבלת נחליף שורה i עם שורה n+1-i נקבל את המטריצה A, החלפת עמודות או שורות כופלת דטרמיננט ב 1-, ולכן כיון שיש סך הכל 6 החלפות נקבל כי det(C)=det(A), ולכן det(B)=6!det(A).

תשובה 8

התשובה היא נכון כיון ש

$$(AB)_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} = A_{1,i}B_{j,1} + A_{2,i}B_{j,2} = B_{j,1}A_{1,i} + B_{j,2}A_{2,i} = (BA)_{j,i} = (AB)_{j,i}$$

תשובה 9

כן כי הוכחנו כי $\det(A^*) = \det(A)^{n-1}$, ולכן אם $\det(A^*) = \det(A)^{n-1} \neq 0$ אז גם $\det(A) \neq 0$.

תשובה 10

לא, למשל מעל השדה $\mathbb{Z}_7$ נובע כי אפילו אם יש משתנה חופשי אחד יש לו רק שבעה פתרונות.

תשובה 11

התשובה לא נכון. כיון שיש למערכת פתרון יחיד אז הדטרמיננט שלה מעל $\mathbb{Z}$ שונה מ-0 אבל יתכן כי מעל $\mathbb{Z}_7$ הוא יתאפס ואז לא יהיה פתרון יחיד.