

**מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב**

**סמסטר קיץ התשע"ח מועד ב**

יום ד כב חשוון התשע"ט 31-10-2018

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות שה"כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. שה"כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- $60+20+20=100$

**בהצלחה.**

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 6y + 2z = 4 \\ 5x + 6y + z = 3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע  $Z_7$ .

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} x + (b+1)y + 4z = b \\ 2x + 2by + 7z = 3b - 1 \\ 4x + 10y + (8b-1)z = 4b - 1 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של  $b$  למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד. פתור את המערכת עבור אותם  $b$  בעלי אינסוף פתרונות

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה  $A_n$  מטריצה רבועית  $n \times n$  המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 3 & j=i & 1 \leq i \leq n \\ 2 & j=i+1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ 1 & j=i-1 & 2 \leq i \leq n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור  $n=1,2,3,4,5,6$ .
- ב. מצא קשר בין  $\det(A_n)$  ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור  $\det(A_n)$ .
- ג. מצא את  $\det(A_n)$  כפונקציה מפורשת של  $n$ .
- ד. פתור את המשוואה  $Av=0$ .

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+i)x + (2+i)y + (2+i)z = 2+i \\ (4+i)x + (6+i)y = 6 \\ (3+2i)y + (2-2i)z = 5 \end{array} \right.$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב  $y$  של הפתרון של המערכת.

שאלה 5 (10 נקודות)

$$\frac{(1-i)^{20}}{(\sqrt{3}-i)^{10}} \quad \text{א. חשב את}$$

ב.

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 19 & -1 & -2 \\ 29 & -3 & -2 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר  $3 \times 3$  ונתון כי  $a_{1,2} = 1, a_{2,2} = 2, a_{3,2} = 3$  וכי

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 8 & -16 & 8 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

מצא את כל המטריצות האפשריות A. המקיימות את הנתונים

שאלה 7 (10 נקודות)

חשב את הדטרמיננט של המטריצה A המוגדרת להלן:

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 2 & a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ 4 & a+b+c+d & a^2+b^2+c^2+d^2 & a^3+b^3+c^3+d^3 \end{pmatrix}$$

### חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנויות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון. כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

#### שאלה 8 (5 נקודות)

נתונות מטריצות  $A, B$  מסדר  $n \times n$ . נתון  $adj(A) = adj(B)$ . אז  $A = B$

לא נכון

נכון

נמוק קצר

#### שאלה 9 (5 נקודות)

נתונות מטריצות  $A, B$  מסדר  $n \times n$ . נתון  $A^3 = B^3$ . אז  $A = B$

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

יתכן מצב בו במערכת משוואות יש משתנה חפשי ומספר הפתרונות איננו אינסופי.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

. בחוג  $\mathbb{Z}_{100}$  יש אבר שונה מ-1 שהפיך ביחס לכפל.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)

הוכח כי אם  $A$  הפיכה אז הדטרמיננט שלה איננו 0.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד  
מההוכחה.

**פתרונות**  
תשובה 1



עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_1 - 3S_3 \rightarrow S_1 \\ S_2 - 2S_3 \rightarrow S_2}} \begin{pmatrix} -12 & -16 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_1 + 2S_2 \rightarrow S_1 \\ S_2 + S_3 \rightarrow S_3}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2S_1 \rightarrow S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 - S_1 \rightarrow S_2 \\ S_1 + S_3 \rightarrow S_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ו נוכל לפתר את המערכת :  $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ואכן

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 1 & b+1 & 4 & b \\ 2 & 2b & 7 & 3b-1 \\ 4 & 10 & 8b-1 & 4b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} S_2-2S_1 \rightarrow S_2 \\ S_3-4S_1 \rightarrow S_3 \end{matrix}]{S_2-2S_1 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & b+1 & 4 & b \\ 0 & -2 & -1 & b-1 \\ 0 & 6-4b & 8b-17 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3+(3-2b)S_2 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & b+1 & 4 & b \\ 0 & -2 & -1 & b-1 \\ 0 & 0 & 10b-20 & X \end{pmatrix},$$

$$X = 1 + (b-1)(3-2b) = -2b^2 + 5b - 2 = -(b-2)(2b-1)$$

עבור  $b=2$  למערכת יש אינסוף פתרונות. לכל  $b$  אחר יש למערכת פתרון יחיד. כשנציב

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+4S_2 \rightarrow S_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$x = 6 + 5y, z = -1 - 2y, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad b=2 \text{ נקבל את הפתרון}$$

תשובה 3

$$A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{n+1}) = 3 \det(A_n) - 2 \det(A_{n-1}) \rightarrow \det(A_{n+1}) - \det(A_n) = 2 \det(A_n) - \det(A_{n-1}),$$

$$\det(A_1) = 3, \det(A_2) = 1, \det(A_3) = -3, \det(A_3) - \det(A_2) = -4, \det(A_2) - \det(A_1) = -2,$$

$$\det(A_{n+1}) - \det(A_n) = -2^n, \det(A_n) - \det(A_{n-1}) = -2^{n-1}, \dots, \det(A_{n+1}) = \det(A_n) - 2^n =$$

$$= \det(A_{n-1}) - 2^n - 2^{n-1} = \dots = \det(A_1) - (2^n + 2^{n-1} + \dots + 2) = 3 - 2(2^n - 1) = 5 - 2^{n+1}$$

נשים לב כי  $\det(A_n) \neq 0$  ולכן המטריצה הפיכה ונקבל פתרון יחיד  $v = 0$

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי עמודה שמאלית ונקבל:

$$\det(A) = (1+i)[(6+i)(2-2i) - 0(3+2i)] -$$

$$(4+i)[(2+i)(2-2i) - (2+i)(3+3i)] =$$

$$= (1+i)(6+i)(2-2i) - (4+i)(2+i)(-1-5i) =$$

$$= 2(1+i)(1-i)(6+i) + (8+6i-1)(1+5i) =$$

$$= 4(6+i) + (7+6i)(1+5i) =$$

$$= 24 + 4i + 7 + 35i + 6i - 35 = -4 + 45i$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה  $Ay$ ,  
ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל:

$$\begin{aligned} \det(A_y) &= (1+i)[(6)(2-2i) - 0(5)] - \\ & (4+i)[(2+i)(2-2i) - (2+i)(5)] = \\ &= (1+i)12(1-i) - (4+i)(2+i)(-3-2i) = \\ &= 24 + (8+6i-1)(3+2i) = \\ & \text{ולכן:} = 24 + (7+6i)(3+2i) = \\ &= 24 + 21 - 12 + 18i + 14i = 31 + 32i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{31+32i}{-4+45i} = \frac{(31+32i)(-4-45i)}{16+2025} = \\ &= -\frac{124+1440+128i+1395i}{2041} = \frac{1564+1523i}{2041}. \end{aligned}$$

תשובה 5 א

$$\begin{aligned} \frac{(1-i)^{20}}{(\sqrt{3}-i)^{10}} &= \frac{(\sqrt{2} \operatorname{cis}(-45))^{20}}{(2 \operatorname{cis}(-30))^{10}} = \frac{2^{10} \operatorname{cis}(-900)}{2^{10} \operatorname{cis}(-300)} = \\ &= \operatorname{cis}(-600) = \operatorname{cis}(120) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 19 & -1 & -2 \\ 29 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a + b - 2c & 9d + e - 2f \\ 19a - b - 2c & 19d - e - 2f \\ 29a - 3b - 2c & 29d - 3e - 2f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2a + 4d \\ 2b & 2b + 4e \\ 2c & 2c + 4f \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$7a + b - 2c = 19a - 3b - 2c = 29a - 3b - 4c = 0$$

$$\rightarrow 12a - 4b = 0, 9a - 3b = 0 \rightarrow b = 3a, c = 5a \rightarrow$$

$$5d + e - 2f = 2a, 19d - 5e - 2f = 2b, 29d - 3e - 6f = 2c \rightarrow$$

$$14d - 6e = 2b - 2a = 4a, 14d - 6e = 2c - 6a = 4a \rightarrow$$

$$7d = 3e + 2a, 3e = 7d - 2a, 29d - (7d - 2a) - 6f = 10a,$$

$$22d - 6f = 8a, 11d - 3f = 4a.$$

ולכן:

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ 3a & 7d/3 - 2a/3 \\ 5a & 11d/3 - 4a/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3a & 3d \\ 9a & 7d - 2a \\ 15a & 11d - 4a \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3a & 0 \\ 9a & -2a \\ 15a & -4a \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3d \\ 0 & 7d \\ 0 & 11d \end{pmatrix} = \frac{a}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & -2 \\ 15 & -4 \end{pmatrix} + \frac{d}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן נשתמש בנתונים ונקבל משוואות

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & x \\ b & 2 & y \\ c & 3 & z \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 8 & -16 & 8 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3a - c = -8 \rightarrow c = 3a + 8$$

$$2a - b = -4 \rightarrow b = 2a + 4$$

$$z - 3x = -8 \rightarrow z = 3x - 8$$

$$y - 2x = -4 \rightarrow y = 2x - 4$$

$$bz - cy = -8 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} (2a + 4)(3x - 8) - (3a + 8)(2x - 4) &= \\ = -16a + 12x - 32 - (-12a + 16x - 32) &= \\ -4a - 4x = -8 \rightarrow x + a = 2 \end{aligned}$$

והפתרון

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 - a \\ 2a + 4 & 2 & -2a \\ 3a + 8 & 3 & -2 - 3a \end{pmatrix}$$



תשובה 7

נתונה המטריצה A ונפעל עליה פעולות יסודיות

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 2 & a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ 4 & a+b+c+d & a^2+b^2+c^2+d^2 & a^3+b^3+c^3+d^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4-S_3 \rightarrow S_4}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 2 & a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2 \rightarrow S_3}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 2 & a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_1 \rightarrow S_2} \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

כלומר פעולות יסודיות שומרות דטרמיננט הביאו את המטריצה לצורת מטריצת ון דר מונדה ולכן הדטרמיננט שלה כמו של דטרמיננט של ון דר מונדה

$$\det = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$$

תשובה 8

לא נכון. עבור מטריצה קבועה מסדר גדול או שווה 3, מתקיים כי  $adj(A) = 0$  לכן אם A ו B מטריצות קבועות שונות מסדר 3 או יותר, יש להן אותה מטריצת adj

תשובה 9



580242451 עמותה רשומה

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

לא נכון. נניח כי המטריצות הן בעלות ממד 1, ומכילות מספרים מרוכבים. נבחר

$$A^3 = B^3, A \neq B \text{ אז } A=1, B = cis(120)$$

תשובה 10

נכון אם השדה סופי אז יש רק מספר סופי של ערכים להציב במקום כל משתנה חפשי

תשובה 11

נכון  $3 \cdot 67 = 201$  ולכן  $3 \cdot 67 = 1 \pmod{100}$ , כלומר 3 ו 67 הפיכים ונגדיים זה של זה.