מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשע"ו מועד ב

יום ד ז כסלו התשע"ז 7-12-2016

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה"כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה"כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- 60+20+20=100

בהצלחה.

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{Bmatrix} 2x & +2y & +4z & =1 \\ 4x & -2y & -z & =4 \\ 3x & -6y & +z & =-3 \end{Bmatrix}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{Bmatrix} x & +by & +3z & =3b \\ 3x & +(2b+3)y & +10z & =5b+10 \\ 5x & +11y & +(6b+4)z & =32 \end{Bmatrix}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} i & j=i & 1 \le i \le n \\ i & j=i+1 & 1 \le i \le n-1 \\ 1 & j=i-1 & 2 \le i \le n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשוואה Av=0.

<u>שאלה 4 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (1+i)x & +(2+i)y & +(3+i)z & =1 \\ (4+i)x & & & =4 \\ (6+i)x & +(2+2i)y & +(2-2i)z & =3 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב x של הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

א. חשב את $\dfrac{(2i)^{100}}{(\sqrt{3}+i)^{99}}$

.

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקיימות את המשוואה :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{3,1}=1, a_{3,2}=2, a_{3,3}=3$

ונתון כי $a_{1,1}+a_{2,1}=11$ וכי

$$A^*=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 12 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

מצא את איברי A. A^* כוללת סימנים אך איננה כוללת שחלוף (כלומר חסר התהליך של A^T).

שאלה 7 (10 נקודות)

חשב את הדטרמיננט של המטריצה A המוגדרת להלן:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונות B,A מטריצות הפיכות רבועיות מסדר n. אז מתקיים

adj(AB)=adj(B)adj(A)

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונה A מטריצה הפיכה מסדר n. אז מתקיים det(adj(A))=det(A)..

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

כל פתרון של המערכת $A^2v=0$ הוא פתרון של המערכת $Av=0$.

נכון לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 11 (5 נקודות)</u>

נתון וקטור v אשר פותר את המערכות $Av=0,Bv=0$. אז הוא פותר את המערכת $(A-B)v=0$.

נכון לא נכון

<u>חלק ג</u>

<u>שאלה 12 (20 נקודות)</u>

הוכח כי אם $\det(A)$ שונה מ-0 אז A הפיכה.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+S_3\to S_2]{S_1-4S_3\to S_1} \begin{pmatrix} -10 & -2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 7 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+S_3\to S_3]{S_1+5S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 4 & 35 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+S_3\to S_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[6S_2\to S_2]{2S_1\to S_1} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 2 & 10 & 2 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ואכן $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו נוכל לפתר את המערכת :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 3 & 3b \\ 3 & 2b+3 & 10 & 5b+10 \\ 5 & 11 & 6b+4 & 32 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2-3S_1\to S_2]{S_3-5S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & b & 3 & 3b \\ 0 & 3-b & 1 & 10-4b \\ 0 & 11-5b & 6b-11 & 32-15b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3+(6b-11)S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & b & 3 & 3b \\ 0 & 3-b & 1 & -4b+10 \\ 0 & A & 0 & B \end{pmatrix}.$$

$$A = (11-5b)-(6b-11)(3-b)+2(5-3b) =$$

$$= 6b^2 - 34b + 44 = 2(b-2)(3b-11), B = (32-15b)-(10-4b)(6b-11) =$$

$$= 24b^2 - 119b + 142 = (b-2)(24b-71)$$

עבור b=2 למערכת יש אינסוף פתרונות. b=11/3 אין פתרון עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי

$$\det(A_{n+1}) = n\det(A_n) - (n-1)\det(A_{n-1}), \det(A_1) = 1,$$

ולכן $\det(A_2) = 1, \det(A_{n+1}) = n\cdot 1 - (n-1)\cdot 1 = 1$

קבלנו באינדוקציה כי הדטרמיננט הוא 1 לכל n, המטריצה תמיד הפיכה ה. פתרון המערכת הוא וקטור ה-0.

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי שורה אמצעית ונקבל:

$$\det(A) = -(4+i)[(2+i)(2-2i) - (2+2i)(3+i)] =$$
$$= -(4+i)[(4-2i+2) - (6+8i-2)] =$$
$$= -(4+i)(2-10i).$$

ב. שיטה ראשונה נשתמש במשואה השניה ונקבל

$$z=\frac{4}{4+i}=\frac{4(4-i)}{17}=\frac{16}{17}-\frac{4}{17}i$$

נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ay, ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי השורה האמצעית ושוב נקבל :

$$\det(A_x)=-4[(2+i)(2-2i)-(3+i)(2+2i)]=$$
$$=-4(2-10i)$$

ולכן :

$$z=\frac{\det(A_z)}{\det(A)}=\frac{4.}{(4+i).}.$$

כמקודם.

תשובה 5 א

$$\frac{(2i)^{100}}{(\sqrt{3}+i)^{99}} = 2i\frac{(2i)^{99}}{(\sqrt{3}+i)^{99}} = 2i[\frac{2i}{\sqrt{3}+i}]^{99} =$$

$$= 2i[\frac{2i(\sqrt{3}-i)}{3+1}]^{99} = 2i[\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}]^{99} =$$

$$= 2i[\frac{1+\sqrt{3}i}{2}]^{99} == 2i(cis60)^{99} =$$

$$= 2i(cis60)^{6\cdot16+3} == 2i[(cis60)^{6}]^{16}(cis60)^{3} =$$

$$= 2i\cdot1\cdot cis(180) = 2i\cdot1\cdot(-1) = -2i$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b+3c & -d+2e+3f \\ 2b+2c & 2e+2f \\ 2b+5c & 2e+5f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+4d \\ b & 2b+4e \\ c & 2c+4f \end{pmatrix}$$

מהשואת המטריצות נקבל 6 משואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות $(1,1),(2,1),(3,1)$ נקבל את 3 המשואות :

$$-a+2b+3c = 2a \to 2b+3c = a$$

$$2b+2c = b \to b+2c = 0$$

$$2b+5c = c \to 2b+4c = 0$$

$$\to b = -2c, a = -4c+3c = -c$$

ולכן נציב ונקבל את 2 המשואות :

$$-d+2e+3f=2a+4d \to 3d+2a=2e+3f$$

$$2e+2f=2b+4e \to f=b+e$$

$$2e+5f=2c+4f \to f=2c-2e=-b-2e$$

$$b+e=-b-2e \to 2b=-3e, -4c=-3e, e=(4/3)c$$

$$\to f=b+e=-2c+(4/3)c=-(2/3)c$$

$$3d+2a=2e+3f \to$$

$$3d=2e+3f-2a=(8/3)c-2c+2c=(8/3)c$$

$$d=(8/9)c$$

לכן הפתרון היחיד הוא המטריצה .

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & (8/9)c \\ -2c & (4/3)c \\ c & -(2/3)c \end{pmatrix} = 9c\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -18 & 4 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

נשתמש בנתונים ונקבל משוואות

$$3a-c=12 \to c=3a-12$$
$$2a-b=6 \to b=2a-6$$
$$3x-z=6 \to z=3x-6$$
$$2x-y=3 \to y=2x-3$$
$$bz-cy=3 \to$$
$$(2a-6)(3x-6)-(3a-12)(2x-3)=$$
$$=-12a-18x+36-(-9a-24x+36)$$
$$=6x-3a=3 \to 2x-a=1 \to a=2x-1$$
$$a_{1,1}+a_{2,1}=a+x=3x-1=11 \to x=4, a=7$$

.

תשובה 7

נתון כי ונתונה המטריצה A ונפעל עליה פעולות יסודיות

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{pmatrix}\xrightarrow[S_4-a^3S_1\to S_4]{S_2-aS_1\to S_2,S_3-a^2S_1\to S_3}\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&b-a&c-a&d-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2&d^2-a^2\\0&b^3-a^3&c^3-a^3&d^3-a^3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}b-a&c-a&d-a\\b^2-a^2&c^2-a^2&d^2-a^2\\b^3-a^3&c^3-a^3&d^3-a^3\end{pmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{pmatrix}1&1&1\\b+a&c+a&d+a\\b^2+ab+a^2&c^2+ac+a^2&d^2+ad+a^2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-c_1\to c_3]{c_2-c_1\to c_2}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{pmatrix}1&0&0\\b+a&c-b&d-b\\b^2+ab+a^2&c^2+ac-ab-b^2&d^2+ad-ab-b^2\end{pmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\det\begin{pmatrix}1&1\\a+b+c&a+b+d\end{pmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

תשובה 8

התשובה כן נכון כיון שידוע כי

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},(AB)^{-1}=\frac{adj(AB)}{\det(AB)},$$

$$(A)^{-1}=\frac{adj(A)}{\det(A)},(B)^{-1}=\frac{adj(B)}{\det(B)}$$

תשובה 9

לא כי הזהות $Aadj(A)^T=\det(A)I$ גוררת אחרי הפעלת הדטרמיננטה כי

$$\det(A)\det(adj(A)^T)=\det(A)^n\det(I)$$ ולכן

$$\det(adj(A))=\det(A)^{n-1}$$

.

תשובה 10

לא, מספיקה דוגמא נגדית למשל במטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ לא פותר את

Av=0 וכן פותר את $A^2v=0$

תשובה 11

התשובה נכון : לפי חוק הפילוג נובע כי $(A-B)v=Av-Bv=0-0=0$