המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב-סמסטר סתו.

מועד ב, יום ב, יב ניסן התשס"ט, 6-4-2009

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- במבחן 9 שאלות ב-3 חלקים.
- בחלק הראשון 5 שאלות במשקל של 14 נקודות כל אחת. סה"כ 70 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 3 שאלות במשקל של 4 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בגוף השאלון. סה"כ 12 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 18 נקודות.

70+12+18=100

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 :פקס Tel: (972-9) 8607777 :טל

חלק א- שאלות 1-5 כלן חובה. משקל כל שאלה 14 נקודות.

שאלה 1(14 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +(b+2)y & +2z & = b-1 \\ (b-1)x & +9y & +2z & = 5 \\ bx & +14y & +4z & = 2b+1 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

עבור אותם b-ים שיש אינסוף פתרונות מצא את ההצגה הפרמטרית של הפתרונות, ועבור אותם b-ים שיש פתרון יחד הצג אותו כפונקציה של b.

שאלה 2(14 נקודות)

פתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (1-i)x & +(2-i)y & = 7 \\ -2ix & +iy & = 1 \end{cases}$$

שאלה 3(14 נקודות)

א.

מצא פרוק LU של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&2\\5&4&8\end{pmatrix}$$

נתון כי A היא מטריצה רבועית 2x2 ונתונות החזקות הבאות שלה.

$$A^3=\begin{pmatrix}1&14\\0&8\end{pmatrix},A^5=\begin{pmatrix}1&62\\0&32\end{pmatrix}$$

ב.מצא את המטריצה A^4.

ג. מצא את המטריצה A^n.

שאלה 4(14 נקודות)

א.מצא את כל המטריצות A מסדר 3x3 המקיימות את התנאים הבאים:
$a_{3,1}=3,a_{3,2}=1,a_{3,3}=1$ וכן מתקיימים הדטרמיננטים הבאים של המינורים מ-A
$\det(M_{1,1})=3,\ \det(M_{1,2})=-1,\ \det(M_{1,3})=-10,$
$\det(M_{2,1})=-2,\ \det(M_{2,2})=-14, \det(M_{2,3})=-8$.

ב.מצא את כל הדטרמיננטים האפשריים של כל המטריצות שמצאת בסעיף א.

שאלה 5(14 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי: לכל $1\le i,j\le n$

$$A_{i,j}=\begin{cases}1 & |i-j|=1\\ 2 & i-j=0\\ 0 & |i-j|>1\end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4.

ב.כתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).

ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.

חלק ב

בחלק זה שלש שאלות בנות 4 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון .כל השאלות הן שאלות חובה.

שאלה 6(4 נקודות)

נתונה מערכת בת m משואות לינאריות הומוגניות בעלות n משתנים ונתון כי $n<m$. אז למערכת יש פתרון יחיד והוא פתרון ה-0.

נכון   לא נכון   נמוק קצר.

שאלה 7(4 נקודות)

נתונה מערכת בת m משואות לינאריות הומוגניות בעלות n משתנים מעל Z_2. אז אפשרי מצב שקבוצת הפתרון מכילה 2 פתרונות בדיוק.

נכון   לא נכון   נמוק קצר.

שאלה 8(4 נקודות)

נתונה מטריצה A, רבועית מסדר n עם איברים שלמים והפיכה מעל R. נביט על המטריצה B המתקבלת מ-A על ידי זה שכל איבר מוחלף במחלקה שלו מודולו 3, כלומר למשל המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

הופכת להיות המטריצה

אז גם המטריצה B היא הפיכה מעל Z_3.

נכון לא נכון נמוק קצר.

<u>חלק ג</u>

<u>שאלה 9 (18 נקודות)</u>

בכתה למדנו משפט בן 5 טענות שקולות, אשר אחת מהטענות היא שהמטריצה A הפיכה, וטענה אחרת מבין החמש היא שA היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות. נסח את המשפט בשלמותו והוכח אותו במחברתך.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & b+2 & 2 & b-1 \\ b-1 & 9 & 2 & 5 \\ b & 14 & 4 & 2b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-bS_1\to S_3]{S_2-(b-1)S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b+2 & 2 & b-1 \\ 0 & 9-(b-1)(b+2) & 2-2(b-1) & 5-(b-1)^2 \\ 0 & 14-b(b+2) & 4-2b & 2b+1-b(b-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b+2 & 2 & b-1 \\ 0 & -b^2-b+11 & 4-2b & -b^2+2b+4 \\ 0 & -b^2-2b+14 & 4-2b & -b^2+3b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b+2 & 2 & b-1 \\ 0 & -b^2-b+11 & 4-2b & -b^2+2b+4 \\ 0 & 3-b & 0 & b-3 \end{pmatrix}$$

ולכן אם b=3 למערכת הקודמת יש אינסוף פתרונות אותם נמצא עכשיו:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+5S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to x=8z+7,\ y=-2z-1$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8z+7 \\ -2z-1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן אם b≠3 אפשר לחלק את המשוואה האחרונה ולקבל.:

$$\begin{pmatrix} 1 & b+2 & 2 & b-1 \\ 0 & -b^2-b+11 & 4-2b & -b^2+2b+4 \\ 0 & 3-b & 0 & b-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3/(3-b)\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & b+2 & 2 & b-1 \\ 0 & -b^2-b+11 & 4-2b & -b^2+2b+4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-(-b^2-b+11)S_3\to S_2]{S_1-(b+2)S_3\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 4-2b & -2b^2+b+15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2-b)S_1-S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2-b & 0 & 0 & (2b+1)(2-b)-(-2b^2+b+15) \\ 0 & 0 & 4-2b & -2b^2+b+15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-b & 0 & 0 & 2b-13 \\ 0 & 0 & 4-2b & -2b^2+b+15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אם b=2 מקבלים 0=-9 סתירה, לכן עבור b=2 אין פתרון.

לכל b אחר יש למערכת פתרון יחיד והוא:

$$x=\frac{2b-13}{2-b},\ y=-1,\ z=\frac{-2b^2+b+15}{2-b}$$

פתרון יפה מהמחברת של רדמילה וקנין.

$$\begin{pmatrix}1 & b+2 & 2 & b-1\\ b-1 & 9 & 2 & 5\\ b & 14 & 4 & 2b+1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2-S_3\to S_2}\begin{pmatrix}1 & b+2 & 2 & b-1\\ -1 & -5 & -2 & 4-2b\\ b & 14 & 4 & 2b+1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_1+S_2\to S_2]{S_3+bS_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & b+2 & 2 & b-1\\ 0 & b-3 & 0 & 3-b\\ 0 & 14-5b & 4-2b & 2b+1-b(4-2b)\end{pmatrix}$$

ולכן כמקודם אם b=3 יש אינסוף פתרונות, ואם לא, אפשר לחלק ולקבל y=-1 ולהמשיך בפתרון.

$$\begin{pmatrix}1 & b+2 & 2 & b-1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 14-5b & 4-2b & 2b+1-b(4-2b)\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-(14-5b)S_2\to S_3]{S_1-(b+2)S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 2b+1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 4-2b & 15-3b-b(4-2b)\end{pmatrix}$$

ושוב מקבלים כי 2 הוא ערך מיוחד.

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2-i & 7 \\ -2i & i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[iS_2\to S_2]{(1+i)S_1\to S_1} \begin{pmatrix} 2 & 3+i & 7+7i \\ 2 & -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 2 & 3+i & 7+7i \\ 0 & -4-i & -7-6i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2/(-4-i)\to S_2} \begin{pmatrix} 2 & 3+i & 7+7i \\ 0 & 1 & A \end{pmatrix}, A = \frac{-7-6i}{-4-i} = \frac{7+6i}{4+i} = \frac{(7+6i)(4-i)}{17} = \frac{34+17i}{17} =$$

$$= 2+i, \begin{pmatrix} 2 & 3+i & 7+7i \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-(3+i)S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & B \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix}, B = 7+7i-(2+i)(3+i) =$$

$$= 7+7i-(5+5i) = 2+2i = 2(1+i) \to x = 1+i, y = 2+i.$$

תשובה 3

א.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את L נכפל את ההפוכות של שלש המטריצות האלמנטריות אשר מתאימות לפעולות האלמנטריות שעשינו, ובסדר הפוך:

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\5&2&1\end{pmatrix}$$

כפי שקל לראות.
סעיף ב.

נחשב את ההפוכה של A^3 ונקבל

$$A^{-3}=\begin{pmatrix}1&-7/4\\0&1/8\end{pmatrix}$$

נכפל את המטריצה הזו ב A^5 ונקבל:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&6\\0&4\end{pmatrix}$$

מטריצה זו נכפל בעצמה ונקבל

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

ג.קל לראות לפי אינטואיציה כי

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

תשובה 4-א

נרשם את המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז:

$$3 = M_{1,1} = e - f, -1 = M_{1,2} = d - 3f,$$
$$-10 = M_{1,3} = d - 3e$$

קבלנו 3 משואות ב-3 נעלמים:

$$\begin{matrix} d-3f=-1 \\ d-3e=-10 \\ e-f=3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_1\rightarrow S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+3S_2\rightarrow S_3]{S_2\leftrightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow d=3f-1, e=f+3$$

כעת נציב

$$-2=M_{2,1}=b-c, -14=M_{2,2}=a-3c,$$
$$-8=M_{2,3}=a-3b$$

קבלנו 3 משואות ב-3 נעלמים:

$$\begin{matrix} a-3c=-14 \\ a-3b=-8 \\ b-c=-2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -14 \\ 1 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_1\rightarrow S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -14 \\ 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+3S_2\rightarrow S_3]{S_2\leftrightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a=3c-14, b=c-2.$$

ב.כעת נציב

$$adj(A)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -10\\ 2 & -14 & 8\\ ? & ? & ?\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3c-14 & c-2 & c\\ 3f-1 & f+3 & f\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

נכפל את השורה הראשונה של A בעמודה הראשונה של המוחלפת של adj(A) ונקבל:

$$[(3c-14)3+1(c-2)-10c]=[9c-42+c-2-10c]=-44.$$

בצורה דומה נכפל את השורה השניה של A בעמודה השניה של המוחלפת של adj(A) ונקבל:

$$[2(3f-1)-14(f+3)+8f]=[6f-2-14f-42+8f]=-44.$$

כלומר כל המטריצות הללו מקיימות כי det(A)=-44.

דרך אחרת (של איגור)

$$\det(A)=\det(\begin{pmatrix}3c-14 & c-2 & c\\ 3f-1 & f+3 & f\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix})\xrightarrow[C_2-C_3\to C_2]{C_1-3C_3\to C_1}\det(\begin{pmatrix}-14 & -2 & c\\ -1 & 3 & f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix})$$

$$\xrightarrow{S_1-14S_2\to S_1}\det(\begin{pmatrix}0 & -44 & c-14f\\ -1 & 3 & f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix})\xrightarrow{S_2\leftrightarrow S_1}$$

$$-\det(\begin{pmatrix}-1 & 3 & f\\ 0 & -44 & c-14f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix})=-(-1)(-44)=-44.$$

תשובה 5

א.נכתב את A_4.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב.נפתח את הדטרמיננט לפי השורה האחרונה:

$$\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).$$

ג.נקבל כי עבור $n=1,2,3,4$ מתקיים כי $\det(n)=n+1$, ולכן באינדוקציה נובע אותו הדבר לכל n.

$$\det(A_n) = 2n - (n-1) = n+1.$$

תשובה 6

התשובה לא נכונה ומספיקה דוגמא נגדית:

$$\begin{cases} x & +y & =0 \\ x & +y & =0 \\ x & +y & =0 \end{cases}$$ והיא

בעלת אינסוף פתרונות.

תשובה 7

התשובה נכונה ומספיקה דוגמא המאשרת זאת:

$$\left\{x+y=0\rightarrow y=-x=x\rightarrow(0,0),(1,1).\right.$$

תשובה 8

התשובה לא נכונה ומספיקה דוגמא נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\det(A)=3,B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\det(B)=0(\operatorname{mod}3)$$