מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר סתו התשע"ה מועד ג, יום ב, כט איר התשע"ה 18-5-2015

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה"כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה"כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- 60+20+20=100

בהצלחה.

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +y & & =2 \\ 2x & & +3z & =0 \\ 3x & +4y & +2z & =4 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו חמש $\mathbb{Z}_5$.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +3y & +(3b-1)z & =5b \\ 2x & +7y & +z & =-b \\ 4x & +(6b+1)y & +11z & =18 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)
נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j}=\begin{cases} 10 & i=j \\ 2 & i=2k-1,\ j=2k,\ k\in N \\ 3 & i=2k-1,\ j=2k-2,\ k\in N \\ 0 & (i\neq 2k-1)\vee[(i=2k-1)\wedge(1<|i-j|)] \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשואה Av=0.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות :

$$\begin{cases} (1+i)x & +(2+i)y & +(3+i)z & =1 \\ (4+i)x & & -(3-i)z & =2 \\ (6+i)x & & +(2-i)z & =3 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב x של הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

א. חשב את $\frac{(1-\sqrt{3}i)^{100}}{(1+i)^{200}}$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 8 & 9\end{pmatrix}A = A\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 6 (10 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{1,1}=1, a_{1,2}=2, a_{1,3}=3$
ונתון

$$A^* = \begin{pmatrix}x & -5 & 1\\y & 1 & 0\\z & 2 & -1\end{pmatrix}$$

מצא את איברי A. *A כוללת סימנים אך איננה כוללת שחלוף (כלומר חסר התהליך של A^T).

<u>שאלה 7 (10 נקודות)</u>

נתונה מטריצה $A_{6,6}$:

נגדיר מטריצה $B_{6,6}$ על ידי $B_{k,j} = kA_{7-k,7-j}$.

א. כתוב את איברי B כפונקציה של איברי A .

ב. כתוב את det(B) כפונקציה של det(A)

<u>חלק ב</u>

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

<u>שאלה 8 (5 נקודות)</u>

נתונה מטריצה הפיכה A, אז ההצגה שלה כמכפלת מטריצות יסודיות היא יחידה.

נכון　　　　　　　　　　לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 9 (5 נקודות)</u>

נתונה מטריצה רבועית בעלת מטריצה צמודה *A. אז המטריצה הצמודה של מינוס A היא מינוס המטריצה הצמודה של A.

נכון　　　　　　　　　　לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 10 (5 נקודות)</u>

נתונה מטריצה רבועית A ויש בה שני אלכסונים זהים. אז A איננה הפיכה.

נכון   לא נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A שאיבריה שלמים ונביט על המטריצה B המתקבלת ממנה על ידי זה שכל איבר שלם מוחלף במחלקה שלו מודולו 2 $\mathbb{Z}_2$. נתון שB היא הפיכה. אז גם A הפיכה.

נכון   לא נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)
הוכח את משפט 5 הנקודות.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות
תשובה 1

$$\begin{pmatrix}1&4&2&1&0&0\\2&0&3&0&1&0\\3&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&2&1&0&0\\0&2&4&3&1&0\\0&4&4&2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-2S_2\to S_3]{S_1-2S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&4&0&3&0\\0&2&4&3&1&0\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2-4S_3\to S_2]{S_1-4S_3\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&2&0&4&4&1\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2/2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&2&2&3\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}$$

ואכן:

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\2&0&3\\3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&2\\2&0&3\\3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

תשובה 2
נעבור למערכת משוואות מטריציאלית ונבצע פעולות אלמנטריות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 2 & 7 & 1 & -b \\ 4 & 6b+1 & 11 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 0 & 1 & 3-6b & -11b \\ 0 & 6b-11 & 15-12b & 18-20b \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-(6b-11)S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 0 & 1 & 3-6b & -11b \\ 0 & 0 & A & B \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$A=15-12b-[(3-6b)(6b-11)]=3(5-4b)-3[(1-2b)(6b-11)]=$$
$$=3[5-4b-(6b-11-12b^2+22b)]=3[16-32b+12b^2]=$$
$$12[4-8b+3b^2]=12(b-2)(3b-2).$$

$$B=18-20b+11b(6b-11)=18-20b+66b^2-121b=$$
$$=66b^2-141b+18=3(22b^2-47b+6)=3(b-2)(22b-3)$$

אם $b=2$ אז $A=B=0$ ואז יש אינסוף פתרונות. אם $b=2/3$ אז $A=0\neq B$ ואז אין פתרונות.

תשובה 3

$$A_6=\begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי

$\det(A_n)=10\det(A_{n-1})$ ולכן $\det(A_n)=10^n$.

ה. כיון שלכל n הדטרמינט שונה מ-0 אז וקטור ה-0 הוא הפתרון היחיד של המשואה.

.

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי שורה עליונה ונקבל:

$$\det(A) = -(2+i)[(4+i)(2-i)+(3-i)(6+i)] =$$
$$= -(2+i)[(8+6i-1)-(6-3i+1)] = -(2+i)9i.$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ax,
ושוב נחשב את הדטרמיננטה שלה לפי העמודה השמאלית ושוב נקבל :

$$\det(A_x) = -(2+i)[2(2-i)+3(3+i)] =$$
$$= -(2+i)(13+i).$$ ולכן :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-(2+i)(13+i).}{-(2+i)9i.} = \frac{1-13i}{9}.$$

כדרוש.

תשובה 5 סעיף א

נציג מונה ומכנה בצורה קטבית.

$$\frac{(1-\sqrt{3}i)^{100}}{(1+i)^{200}}$$

$$1-i\sqrt{3}: R^2=1+3=4, R=2, \tan(\theta)=\frac{-\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}, \theta=120^0.$$

$$z=2cis(120^0)=2cis(\frac{360^0}{3}), z^{100}=2^{100}cis(\frac{360^0}{3}100)=$$

$$=2^{100}cis(360^0(33+\frac{1}{3}))=2^{100}cis(120^0)$$

$$1+i: R^2=1+1=2, R=\sqrt{2}, \tan(\theta)=\frac{1}{1}=1, \theta=45^0.$$

$$w=\sqrt{2}cis(45^0)=\sqrt{2}cis(\frac{360^0}{8}), w^{200}=2^{200/2}cis(\frac{360^0}{8}200)=$$

$$=2^{100}cis(360^0(25))=2^{100}cis(0^0).$$

$$\frac{z^{100}}{w^{200}}=\frac{2^{100}(cis(120))}{2^{100}(cis(0))}=cis(120^0)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f \\ 4b+5c & 4e+5f \\ 8b+9c & 8e+9f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+3d \\ b & 2b+3e \\ c & 2c+3f \end{pmatrix}$$

מהשוואת המטריצות נקבל 6 משוואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות (1,1),(2,1),(3,1) נקבל את 3 המשוואות:

$$a+2b+3c=a \rightarrow 2b+3c=0$$
$$4b+5c=b \rightarrow 3b+6c=0$$
$$8b+9c=c \rightarrow 8b+8c=0$$

מהמקומות (2,2),(3,2) ומהצבת b=c=0 נקבל את 2 המשוואות:

$$4e+5f=2b+3e=3e \rightarrow e+5f=0$$
$$8e+9f=2c+3f=3f \rightarrow 8e+6f=0$$

ופתרונן הוא e=f=0. נציב במשואה של המקום (2,1) ונקבל:

$$2a+3d=d+2e+3f=d \rightarrow 2a+2d=0$$

ולסכום, המטריצות הן מהצורה:

$$\begin{pmatrix} -d & d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

נשתמש בנתונים ונקבל משוואות

$$c-3a=2\rightarrow c=3a-2$$

$$b-2a=-1\rightarrow b=2a-1$$

$$z-3x=1\rightarrow z=3x+1$$

$$y-2x=0\rightarrow y=2x$$

$$ay-bx=1\rightarrow$$

$$a(2x)-(2a-1)x=x=1\rightarrow y=2,z=4$$

$$az-cx=5\rightarrow$$

$$a4-1(3a-2)=a+2=5\rightarrow a=3\rightarrow b=5,c=7$$

כדרוש.

תשובה 7

$$B=\begin{pmatrix} 6a_{6,6} & 6a_{6,5} & 6a_{6,4} & 6a_{6,3} & 6a_{6,2} & 6a_{6,1} \\ 5a_{5,6} & 5a_{5,5} & 5a_{5,4} & 5a_{5,3} & 5a_{5,2} & 5a_{5,1} \\ 4a_{4,6} & 4a_{4,5} & 4a_{4,4} & 4a_{4,3} & 4a_{4,2} & 4a_{4,1} \\ 3a_{3,6} & 3a_{3,5} & 3a_{3,4} & 3a_{3,3} & 3a_{3,2} & 3a_{3,1} \\ 2a_{2,6} & 2a_{2,5} & 2a_{2,4} & 2a_{2,3} & 2a_{2,2} & 2a_{2,1} \\ a_{1,6} & a_{1,5} & a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det(B) = 6!\det(C),$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{6,6} & a_{6,5} & a_{6,4} & a_{6,3} & a_{6,2} & a_{6,1} \\ a_{5,6} & a_{5,5} & a_{5,4} & a_{5,3} & a_{5,2} & a_{5,1} \\ a_{4,6} & a_{4,5} & a_{4,4} & a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \\ a_{3,6} & a_{3,5} & a_{3,4} & a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{2,6} & a_{2,5} & a_{2,4} & a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,6} & a_{1,5} & a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

אם נחליף עמודה i עם עמודה n+1-i נקבל מטריצה שיותר דומה ל A, ואם במטריצה המתקבלת נחליף שורה i עם שורה n+1-i נקבל את המטריצה A, החלפת עמודות או שורות כופלת דטרמיננט ב 1-, ולכן כיון שיש סך הכל 6 החלפות נקבל כי det(C)=det(A), ולכן det(B)=6!det(A).

תשובה 8

התשובה לא נכון ו $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 11 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ממחישה את העובדה.

תשובה 9

לא, אם A היא מטריצה 2x2 אז עבור A– נקבל אותה צמודה כמו של A.

תשובה 10

לא, מספיקה דוגמא נגדית למשל המטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ היא בעלת אלכסונים זהים ועדיין היא הפיכה.

התשובה כן נכון. השויון $AA^*=\det(A)I_n$ גורר כי השויון $\det(A)\det(A^*)=(\det(A))^n 1$ והעובדה שיש שתי שורות מתיחסות גוררת כי $\det(A^*)=0$ ולכן $\det(A)^{n-1}=0$ ולכן $\det(A)=0$.

תשובה 11

התשובה נכון: הדטרמיננטה של B הוא תוצאת מודולו 2 של הדטרמיננטה של A, ואם של B שונה מ-0 אז גם של A שונה מ-0.