מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשע״ח

מועד ג יום ד כז כסלו התשע״ט 5-12-2018

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה״כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- $60+20+20=100$

בהצלחה.

רח' האוניברסיטה 1, קרית יצחק רבין, נתניה 42365 • טל': (972-9) 8607777 • פקס: (972-9) 8844439
1 University St., Kiryat Yitzhak Rabin, Netanya 42365 - ISRAEL • Tel.: (972-9) 8607777 • Fax: (972-9) 8844439

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & =1 \\ 2x & +4y & +4z & =2 \\ 3x & & +z & =0 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו חמש $\mathbb{Z}_5$.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +(b-1)y & -z & =4 \\ 2x & +by & +4z & =4b \\ (b+1)x & +7y & +2z & =20 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד. פתור את המערכת עבור אותם b בעלי אינסוף פתרונות

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 7 & j=i \quad 1\le i\le n \\ 2 & j=i+1 \quad 1\le i\le n-1 \\ 3 & j=i-1 \quad 2\le i\le n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשואה Av=0.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} (1+i)x & +(2+i)y & +(3+i)z & =1+i \\ & +(4+i)y & +(2+2i)z & =6 \\ & (6+2i)y & +(2-2i)z & =3 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב z של הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

א. חשב את $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{10}}{(1-i)^{20}}$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 6 (10 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 מעל שדה $F=\mathbb{R}$ שהדטרמיננט שלה הוא 1, ונתונה המטריצה הצמודה

$$A^* = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצא את כל המטריצות האפשריות A. . המקיימות את הנתונים

.<u>שאלה 7</u> (10 נקודות)

חשב את הדטרמיננט של המטריצה A המוגדרת להלן :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^3 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונות מטריצות A,B מסדר $n\times n$. נתון $adj(A)=adj(B)$. אז $A=B$

נכון

לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונות מטריצות A,B מסדר $n\times n$. נתון $A^3=B^3$. אז $A=B$

נכון

לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

יתכן מצב בו במערכת משוואות יש משתנה חפשי ומספר הפתרונות איננו אינסופי.

נכון

לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 11 (5 נקודות)</u>

. בחוג $\mathbb{Z}_{100}$ יש אבר שונה מ -1 שהפיך ביחס לכפל.

נכון לא נכון

נמוק קצר

<u>חלק ג</u>

<u>שאלה 12 (20 נקודות)</u>

הוכח כי אם A הפיכה אז הדטרמיננט שלה איננו 0..

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק <u>בנפרד מההוכחה.</u>

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+S_3\to S_2]{S_1+2S_3\to S_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+S_3\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+2S_2\to S_3]{S_1+2S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[3S_3\to S_3]{3S_1\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ואכן $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו נוכל לפתר את המערכת:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 1 & b-1 & -1 & 4 \\ 2 & b & 4 & 4 \\ b+1 & 7 & 2 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+2S_1\to S_3]{S_2+4S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & b-1 & -1 & 4 \\ 6 & 5b-4 & 0 & 20 \\ b+3 & 2b+5 & 0 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[6S_3-(b+3)S_2\to S_3]{6S_1-S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b-2 & -6 & 4 \\ 6 & 5b-4 & 0 & 20 \\ 0 & 12b+30-(b+3)(5b-4) & 0 & 168-20(b+3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & b-2 & -6 & 4 \\ 6 & 5b-4 & 0 & 20 \\ 0 & -5b^2+b+42 & 0 & 108-20b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-2 & -6 & 4 \\ 6 & 5b-4 & 0 & 20 \\ 0 & (3-b)(14+5b) & 0 & 4(27-5b) \end{pmatrix}$$

לכן עבור $b=3, b=\frac{14}{5}$ למערכת אין פתרון ולכל אחר למערכת יש פתרון יחיד

תשובה 3

$$A_6 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי

$$\det(A_{n+1})=7\det(A_n)-6\det(A_{n-1})\rightarrow\det(A_{n+1})-\det(A_n)=6\det((A_n)-\det(A_{n-1})),$$

$$\det(A_1)=7,\det(A_2)=41,\det(A_3)=245,\det(A_3)-\det(A_2)=204,\det(A_2)-\det(A_1)=34,$$

$$\det(A_{n+1})-\det(A_n)=34\cdot 6^{n-1}\det(A_{n+1})-\det(A_1)=\frac{34\cdot(6^n-1)}{5},\det(A_{n+1})=\frac{34\cdot 6^n+1}{5}$$

נשים לב כי $\det(A_n)\neq 0$ ולכן המטריצה הפיכה ונקבל פתרון יחיד $v=0$

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי עמודה שמאלית ונקבל:

$$\left\{\begin{array}{llll}(1+i)x & +(2+i)y & +(3+i)z & =1+i\\ & +(4+i)y & +(2+2i)z & =6\\ & (6+2i)y & +(2-2i)z & =3\end{array}\right\}$$

$$\det(A)=(1+i)[(4+i)(2-2i)-(6+2i)(2+2i)]=$$

$$=(1+i)[(10-6i)-(8+16i)]=(1+i)(2-22i)$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ay,
ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל:

$$\det(A_z) = (1+i)[3(4+i) - 6(6+2i)] =$$
$$= (1+i)[(12+3i) - (36+12i)] =$$
ולכן :
$$= (1+i)(-24-9i)$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{(1+i)(-24-9i)}{(1+i)(2-22i)} = \frac{-3(8+3i)}{2(1-11i).} =$$
$$= -\frac{3(8+3i)(1+11i)}{244} = -\frac{3(-25+91i)}{244}.$$

תשובה 5 א

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^{10}}{(1-i)^{20}} = \frac{(2cis(60))^{10}}{(\sqrt{2}cis(-30))^{20}} = \frac{2^{10}cis(600)}{2^{10}cis(-600)} =$$
$$= cis(1200) = cis(120) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

תשובה 5 ב

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f \\ 3b+3c & 3e+3f \\ 6c & 6f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 3a+3d \\ 6b & 3b+3e \\ 6c & 3c+3f \end{pmatrix} \to$$

$$6f = 3c+3f \to f = c$$
$$3e+3f = 3b+3e \to f = b$$
$$6b = 3b+3c \to b = c$$
$$6a = a+2b+3c \to a = b = c = f$$
$$d+2e+3f = 3a+3d \to 2d = 2e \to d = e$$

בדיקה

$$A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ a & d \\ a & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ a & d \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 3e+3a \\ 6a & 3e+3a \\ 6a & 6a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ a & d \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 3a+3e \\ 6b & 3a+3e \\ 6c & 6a \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן נשתמש בנתונים ונקבל משואות

$$A^* = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, (A^*)^T = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 12 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[S_2+S_3 \to S_2]{S_1+S_3 \to S_1}$$

$$\left(\begin{matrix} 9 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[S_2+S_3 \to S_3]{S_1+2S_2 \to S_1}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right) \xrightarrow[S_3+7S_1 \to S_3]{S_2+4S_1 \to S_2}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 15 & 23 \end{matrix}\right)$$

ולכן

$$A^{-1}=\frac{(A^*)^T}{\det(A)}=(A^*)^T=\begin{pmatrix}12 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}\to$$

$$A=((A^*)^T)^{-1}=\begin{pmatrix}12 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 9 & 13\\ 7 & 15 & 23\end{pmatrix}$$

תשובה 7

נתונה המטריצה A ונפעל עליה פעולות יסודיות

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-c_1\to c_4]{c_2-c_1\to c_2,c_3-c_1\to c_3} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^3-a^4 \end{pmatrix} \to$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1\to c_3]{c_2-c_1\to c_2} (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c^3+ca^2+ac^2)-(b^3+ba^2+ab^2) & (d^3+da^2+ad^2)-(b^3+ba^2+ab^2) \end{pmatrix} =$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{pmatrix} c-a & d-a \\ c^3-b^3+a(c^2-b^2)+a^2(c-b) & d^3-b^3+a(d^2-b^2)+a^2(d-b) \end{pmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c^2+cb+b^2+ac+ab+a^2 & d^2+db+b^2+ad+ab+a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1}$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)[(d^2-c^2)+b(d-c)+a(d-c)]=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)[a+b+c+d]$$

ולכן

$$\det=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)[a+b+c+d]$$

תשובה 8

לא נכון. עבור מטריצה קבועה מסדר גדול או שוה 3, מתקיים כי $adj(A)=0$ לכן אם A ו B מטריצות קבועות שונות מסדר 3 או יותר, יש להן אותה מטריצת adj

תשובה 9

לא נכון . נניח כי המטריצות הן בעלות ממד 1, ומכילות מספרים מרוכבים. נבחר $A=1, B=cis(120)$ אז $A^3=B^3, A\neq B$

תשובה 10

נכון אם השדה סופי אז יש רק מספר סופי של ערכים להציב במקום כל משתנה חפשי

תשובה 11

נכון $3\cdot 67=201$ ולכן $3\cdot 67=1\bmod(100)$, כלומר 3 ו 67 הפיכים ונגדיים זה של זה.