NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

מבחן אמצע באלגברה לינארית א למדעי המחשב-סמסטר סתו.

יום ד, ג טבת התשס"ח, 12-12-2007 **שעה** 16.00 .

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה בשאלונים. המחברות לא תקראנה.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

שאלה 1 (32 **נקודות**):

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x+by+4z=9 \\ bx+4y+5z=12 \\ 12x+17y+22z=17b \end{cases}$$

א. מצא את ערכי b עבורם למערכת יש ∞ פתרונות (יתכנו שברים-לא להבהל).

תשובה:

ב. מצא את ערכי b עבורם אין למערכת פתרונות (יתכנו שברים-לא להבהל). תשובה:

ג. מצא את ערכי b עבורם למערכת יש פתרון יחיד (יתכנו שברים-לא להבהל).

תשובה:

ד. עבור כל אותם ערכי b שמצאת בסעיף א, כתוב את הפתרונות. תשובה:

<u>שאלה 2 (20 נקודות):</u>

פתור את המשואה המטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

<u>שאלה 3 (48 נקודות):</u>

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

א. חשב את $A^2=A*A$. תשובה:

ב. חשב את $A^3=A*A*A$. תשובה:

ג. חשב את $I+A$. תשובה:

ד. חשב את $(I+A)^{-1}$. תשובה:

ה. חשב את A^2-A. תשובה:

ו. נסח מסקנה.

תשובות

תשובות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 4 & 9 \\ b & 4 & 5 & 12 \\ 12 & 17 & 22 & 17b \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-6S_1\to S_3]{2S_2-bS_1\to S_2} \begin{pmatrix} 2 & b & 4 & 9 \\ 0 & 8-b^2 & 10-4b & 24-9b \\ 0 & 17-6b & -2 & 17b-54 \end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננט של המטריצה האחרונה, שהוא אגב פי 2 מהדטרמיננט של המטריצה המקורית:

$$\begin{aligned} &\det = 2[(8-b^2)(-2)-(17-6b)(10-4b)] = \\ &4[(b^2-8)-(17-6b)(5-2b)] = 4[b^2-8-(12b^2+85-64b)] = \\ &= 4(-11b^2+64b-93) = -4(11b^2-64b+93) = \\ &= -4(b-3)(11b-31). \end{aligned}$$

ולכן עבור b=3,31/11 יהיה מקרה מיוחד, ועבור כל מקרה אחר נקבל פתרון יחיד. נציב b=3 ונקבל

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 4 & 9 \\ 0 & 8-b^2 & 10-4b & 24-9b \\ 0 & 17-6b & -2 & 17b-54 \end{pmatrix} \xrightarrow{b=3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

כלומר במקרה זה יש אינסוף פתרונות.

נציב b=31/11 ונקבל

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 4 & 9 \\ 0 & 8-b^2 & 10-4b & 24-9b \\ 0 & 17-6b & -2 & 17b-54 \end{pmatrix} \xrightarrow{b=\frac{31}{11}} \begin{pmatrix} 2 & b & 4 & 9 \\ 0 & \frac{7}{121} & \frac{-14}{11} & \frac{-15}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & -2 & -\frac{67}{11} \end{pmatrix}$$

כלומר במקרה זה אין פתרונות.

$$\xrightarrow{11S_2-7S_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{304}{11} \end{pmatrix}$$

כעת נפתור את המערכת עבור b=3. נמשיך מהמערכת בה הצבנו b=3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+3S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to x=z, y=3-2z$$

תשובה 2

נביט ב:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$$

אז ברור כי X צריכה להיות מטריצה 3x2. נסמן $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ נכפל ונקבל שש

משוואות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+3c+5e & b+3d+5f \\ 7c+9e & 7d+9f \\ 11e & 11f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 5a+11b \\ c & 5c+11d \\ e & 5e+11f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 3c+5e & -5a-10b+3d+5f \\ 6c+9e & 9f-5c-4d \\ 10e & -5e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$$

מהשורה האחרונה e=1, וממקום 2,1 נובע כי c=-1. נציב את c ונקבל שתי משוואות

$$9f-4d=0,-5a-10b+3d+5f=0\rightarrow d=2.25f\rightarrow$$
$$6.75f+5f=5a+10b\rightarrow 5(a+2b)=11.75f\rightarrow a+2b=2.35f$$

ולכן פתרון כללי תלוי במשתנים החפשיים f,b והוא:

$a=2.35f-2b,c=-1,d=2.25f,e=1$ והמטריצה הכללית היא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} 2.35f-2b & b \\ -1 & 2.25f \\ 1 & f \end{pmatrix}$$

תשובה 3.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix}\rightarrow A^2=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-6 & -2+4 & -1 \\ 12-24+8 & -6+16-6 & -4+2 \\ 16-36-16 & -8+24-12 & -6+4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\rightarrow A^3=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-12+8 & -2+8-6 & -2+2 \\ 2(4-12+8) & 2(2+8-6) & 2(-2+2) \\ 2(4-12+8) & 2(2+8-6) & 2(-2+2) \end{pmatrix}=.$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וכמו כן:

$$I+A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1&0\\-6&4&-1\\-8&6&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-6&5&-1\\-8&6&-1\end{pmatrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&0\\-6&5&-1&0&1&0\\-8&6&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[S_3-8S_1\rightarrow S_3]{S_2-6S_1\rightarrow S_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&0\\0&-1&-1&-6&1&0\\0&-2&-1&-8&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{S_3-2S_2\rightarrow S_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&0\\0&-1&-1&-6&1&0\\0&0&1&4&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{S_2+S_3\rightarrow S_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&0\\0&-1&0&-2&-1&1\\0&0&1&4&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{S_1+S_2\rightarrow S_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&-1&-1&1\\0&-1&0&-2&-1&1\\0&0&1&4&-2&1\end{array}\right),(I+A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&-1\\4&-2&1\end{pmatrix}$$

וכמו כן:

$$A^2-A=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\-4&4&-2\\-4&4&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&1&0\\-6&4&-1\\-8&6&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&-1\\4&-2&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$A^2-A+I=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&-1\\4&-2&1\end{pmatrix}$$