המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן אמצע באלגברה לינארית א למדעי המחשב.

יום ד,כז כסלו התשס"ט 24-12-2008

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים.
- התשובות תכתבנה במחברות.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

<u>שאלה 1 (25 נקודות):</u>

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+2y+4z=b+2 \\ 3x-y+(b+1)z=6 \\ 7x+(b-1)y+8z=6b+9 \end{cases}$$

א. מצא את ערכי b עבורם למערכת יש ∞ פתרונות (יתכנו שברים-לא להבהל). תשובה:

ב. מצא את ערכי b עבורם אין למערכת פתרונות (יתכנו שברים-לא להבהל). תשובה:

ג. מצא את ערכי b עבורם למערכת יש פתרון יחיד (יתכנו שברים-לא להבהל). תשובה:

ד. עבור כל אותם ערכי b שמצאת בסעיף א, כתוב את הפתרונות. תשובה:

שאלה 2 (25 נקודות):

פתור את המשוואה המטריציאלית:

$$X\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

שאלה 3 (25 נקודות):

נתונה מערכת המשוואות הלינארית $A\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ כאשר A היא בצורת מדרגות כלשהי,

וכאשר ב-A יודעים את העמודות הצדדיות אבל נמחקו שתי העמודות האמצעיות:

$A=\begin{pmatrix}1 & ? & ? & 0\\ 0 & ? & ? & 0\\ 0 & ? & ? & 1\end{pmatrix}$. ונתון כי ה-1 שמופיע בעמודות ראשונה ורביעית הוא 1 פותח (פיבוט).

נא להשלים את הערכים החסרים ב-A.

שאלה 4 (25 נקודות):

מצא את המטריצה ההפוכה של $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&4\\3&4&7\end{pmatrix}$

תשובות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix}1&2&4&b+2\\3&-1&b+1&6\\7&b-1&8&6b+9\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-7S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&4&b+2\\0&-7&b-11&-3b\\0&b-15&-20&-b-5\end{pmatrix}\xrightarrow{(b-15)S_2+7S_3\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&4&b+2\\0&-7&b-11&-3b\\0&0&K&L\end{pmatrix},K=(b-11)(b-15)+140=b^2-26b+25=(b-1)(b-25),$$

$$L=-3b(b-15)-7(b+5)=-3b^2+38b-35=(1-b)(3b-35).$$

ולכן עבור b=1,25 יהיה מקרה מיוחד, ועבור כל מקרה אחר נקבל פתרון יחיד. נציב b=1 ונקבל

$$\begin{pmatrix}1&2&4&b+2\\0&-7&b-11&-3b\\0&b-15&-20&-b-5\end{pmatrix}\xrightarrow{b=1}\begin{pmatrix}1&2&4&3\\0&-7&-10&-3\\0&-14&-20&-6\end{pmatrix}$$ כלומר במקרה זה יש אינסוף פתרונות.

נציב b=25 ונקבל

$$\begin{pmatrix}1&2&4&b+2\\0&-7&b-11&-3b\\0&b-15&-20&-b-5\end{pmatrix}\xrightarrow{b=25}\begin{pmatrix}1&2&4&27\\0&-7&14&-75\\0&10&-20&-30\end{pmatrix}$$ כלומר במקרה זה אין פתרונות.

כעת נפתר את המערכת עבור b=1. נמשיך מהמערכת בה הצבנו b=1 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -10 & -3 \\ 0 & -14 & -20 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/7 \\ 0 & 1 & 2 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 15/7, y + 2z = 3/7 \to y = 3/7 - 2z$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/7 \\ 3/7 - 2z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$X\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} =$$

ולכן מקבלים שתי משוואות:

$$= \begin{pmatrix} -b-c & a-d \\ a-d & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a - d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+1 & 1-c \\ c & d \end{pmatrix} =$$

ולכן פתרון כללי הוא
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בדיקה:

$$\begin{pmatrix} d+1 & 1-c \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d+1 & 1-c \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c+d & d+2-c \\ c-d & c+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d+c+1 & d+1-c \\ c-d-1 & d+c-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 3.

. $\begin{pmatrix} 1 & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. נשים לב כי שני סימני השאלה בשורה השלישית חיבים להיות אפסים, כיון שהם משמאל ל-1 של צורת המדרגות, ולכן, נסמן באתיות את התכנים של שאר המקומות ונקבל:

$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ כמו כן ידוע כי c או d הם 1-ים של צורת המדרגות, ואם d=1 אז לפי צורת המדרגות חיב להתקים כי c=0. ונקבל מערכת קטנה יותר:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נעבר על שתי האפשרויות. אם d=1 אז לפי צורת המדרגות חיב להיות c=b=0 ואז a=-3.

אם c=1 אז a=0 ונובע כי d=2 ולכן b=3

תשובה 4

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1-S_2\to S_1} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_1-2S_3\to S_1} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

ואכן קל לראות כי
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$