מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב מסלול ערב-

סמסטר קיץ התשע״ד מועד א,יום ה,ו חשון התשע״ה 30-10-2014

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה״כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- 60+20+20=100

בהצלחה.

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = 2 \\ 2x - y + 3z = -3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + by + 2z = 3+b \\ x - y + (b-4)z = b-4 \\ 5x + 13y + 8z = 26 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה המטריצה
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 & x^5 \\ x^2 & x^4 & x^6 & x^{10} \\ x^3 & x^6 & x^9 & x^{15} \end{pmatrix}$$

מצא עבור אלו ערכי x היא הפיכה.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j}=\begin{cases} 1 & j=i-1 \quad 2\le i\le n \\ 1 & j=i+1 \quad 1\le i\le n-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An). ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n. ד. פתור את המשואה Av=0.

שאלה 5 (10 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&11\\3&3&1\end{pmatrix}$. חשב את A^{-1} כמכפלת מטריצות יסודיות בשתי דרכים שונות.

דרך א. $A^{-1}=E_n\ldots E_2E_1$ כך ש E_1,E_2,E_3 משולשיות תחתונות.

דרך ב. $A^{-1}=F_n\ldots F_2F_1$ כך ש $F_1,F_2,,F_4$ משולשיות עליונות.

נא לא להשתמש בטריק שבו $E_iE_{i+1}=I$.

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{cases}(1+i)x & +(2+i)y & +(3+i)z & =1\\(4+i)x & & -(3-i)z & =2\\(6+i)x & & +(2-i)z & =3\end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננטה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב x של הפתרון של המערכת.

שאלה 7 (10 נקודות)

א. חשב את $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{100}}{(1-i)^{200}}$

.

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונה מטריצה הפיכה A, אז ההצגה שלה כמכפלת מטריצות יסודיות היא יחידה.

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית בעלת מטריצה צמודה A^*. אז המטריצה הצמודה של מינוס A היא מינוס המטריצה הצמודה של A.

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A ויש בה שני אלכסונים זהים. אז A איננה הפיכה.

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A שאיבריה שלמים ונביט על המטריצה B המתקבלת ממנה על ידי זה שכל איבר שלם מוחלף במחלקה שלו מודולו 2 $\mathbb{Z}_2$. נתון שB היא הפיכה. אז גם A הפיכה.

נכון לא נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)
הוכח כי מטריצה רבועית A היא הפיכה אם הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות
תשובה 1

$$\begin{pmatrix}1&3&3&1&0&0\\3&-2&-4&0&1&0\\2&-1&3&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3&1&0&0\\3&5&3&0&1&0\\2&6&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-2S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&3&1&0&0\\0&-4&-6&-3&1&0\\0&0&-3&-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3&1&0&0\\0&3&1&4&1&0\\0&0&4&5&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2S_3\to S_3]{5S_2\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&3&1&0&0\\0&15&5&20&5&0\\0&0&8&10&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3&1&0&0\\0&1&5&6&5&0\\0&0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-5S_3\to S_2]{S_1-3S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&3&0&-8&0&-6\\0&1&0&-9&5&-10\\0&0&1&3&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&0&6&0&1\\0&1&0&5&5&4\\0&0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

ם

$$\xrightarrow{S_1-3S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&-9&-15&-11\\0&1&0&5&5&4\\0&0&1&3&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&5&6&3\\0&1&0&5&5&4\\0&0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

ואכן קל לראות כי $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&6&3\\5&5&4\\3&0&2\end{pmatrix}$ כעת

נוכל לפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6&3\\5&5&4\\3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29\\31\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 2 & 3+b \\ 1 & -1 & b-4 & b-4 \\ 5 & 13 & 8 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-5S_2\to S_3]{S_2\to S_1, S_1-S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & b-4 & b-4 \\ 0 & b+1 & 6-b & 7 \\ 0 & 18 & 28-5b & 46-5b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-(S_3)/18\to S_3]{S_3/18\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & b-4 & b-4 \\ 0 & 1 & (28-5b)/18 & (46-5b)/18 \\ 0 & 0 & A & B \end{pmatrix}.$$

$$A=\frac{18(6-b)-(b+1)(28-5b)}{18}=\frac{108-18b-(28b+28-5b^2-5b)}{18}=$$

$$=\frac{5b^2-41b+80}{18}=\frac{(5b-16)(b-5)}{18},$$

$$B=\frac{18(7)-(b+1)(46-5b)}{18}=\frac{126-46b-46+5b^2+5b}{18}=\frac{5b^2-41b+80}{18}=A$$

עבור b=5,3.2 למערכת יש אינסוף פתרונות. עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 & x^5 \\ x^2 & x^4 & x^6 & x^{10} \\ x^3 & x^6 & x^9 & x^{15} \end{pmatrix}.$$

פתרון ראשון : נוציא מהשורה השניה גורם משותף x, מהשלישית ברבוע ומהרביעית בשלישית ונקבל

$$\det(A)=x^{1+2+3}\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&x&x^2&x^4\\1&x^2&x^4&x^8\\1&x^4&x^6&x^{12}\end{pmatrix}$$, נחסר שורות ונקבל עבור det(A)

$$x^6\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&x-1&x^2-1&x^4-1\\0&x^2-x&x^4-x^2&x^8-x^4\\0&x^4-x^2&x^6-x^4&x^{12}-x^8\end{pmatrix}=x^6\det\begin{pmatrix}x-1&x^2-1&x^4-1\\x^2-x&x^4-x^2&x^8-x^4\\x^4-x^2&x^6-x^4&x^{12}-x^8\end{pmatrix}$$

נוציא מכל שורה את האבר הראשון ונקבל

$$\det(A)=x^6(x-1)(x^2-x)(x^4-x^2)\det\begin{pmatrix}1&x+1&x^3+x^2+x+1\\1&x^2+x&x^3(x^3+x^2+x+1)\\1&x^2&x^6(x^2+1)\end{pmatrix}$$

שוב נחסר שורות ונקבל

$$\det(A)=x^6(x-1)(x^2-x)(x^4-x^2)\det\begin{pmatrix}1&x+1&x^3+x^2+x+1\\0&x^2-1&(x^3-1)(x^3+x^2+x+1)\\0&-x&x^8-x^5-x^4-x^3\end{pmatrix}$$

והערכים המאפסים את הדטרמיננטט הם x=0,1,-1.

פתרון שני זהו דטרמיננט של מטריצת ון דר מונדה ולכן שוה ל

$(x^2-x)(x^3-x)(x^5-x)(x^3-x^2)(x^5-x^2)(x^5-x^3)$ והרכים המאפסים אותו הם 0,1,-1 ועבור כל ערך אחר הדטרמיננטה הפיך.

תשובה 4

לכתוב את הנכון ואת זה להעתיק

$$A_6=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

נשים לב כי $\det(A_n)=-\det(A_{n-2})$ וכי $\det(A_1)=0, \det(A_2)=-1$ ולכן נקבל

$$\det(A_n)=\begin{cases}0 & n=2k-1\\(-1)^k & n=2k\end{cases}$$

ה. עבור $n=2k$ זוגי הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור n אי זוגי הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$(x,y,-x,-y,\cdots,(-1)^{k-1}y,(-1)x^k)$$

.

תשובה 5 א

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&11\\3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&5\\3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&5\\0&-3&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&5\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

תשובה 5 ב

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&11\\3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-11\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2&3\\-31&-27&0\\3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-8&-7&0\\-31&-27&0\\3&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-8&-7&0\\1&1&0\\3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&7&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\&-3&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כדרוש

תשובה 6

א. נפתח את הדטרמיננט לפי שורה עליונה ונקבל:

$$\det(A) = -(2+i)[(4+i)(2-i)+(3-i)(6+i)] =$$

$$= -(2+i)[(8-2i+1)+(18-3i+1)] =$$

ב. $$= -(2+i)(-10-5i) = 5(2+i)(2+i).$$

נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ax, ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה השמאלית ושוב נקבל :

$$\det(A_x) = -(2+i)[2(2-i)+3(3+i)] =$$

$$= -(2+i)(13+i).$$ ולכן :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-(2+i)(13+i).}{5(2+i)(2+i).} = -\frac{13+i}{5(2+i)} =$$

$$= -\frac{(13+i)(2-i)}{5(2+i)(2-i)} = \frac{26-11i+1}{25} = \frac{27-11i}{25}.$$

כדרוש.

תשובה 7 סעיף א

נציג מונה ומכנה בצורה קטבית.

$$1+i\sqrt{3}: R^2=1+3=4, R=2, \tan(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}, \theta=60^0.$$

$$z=2cis(60^0)=2cis(\frac{360^0}{6}), z^{100}=2^{100}cis(\frac{360^0}{6}100)=$$

$$=2^{100}cis(360^0(16+\frac{4}{6}))=2^{100}cis(240^0)$$

$$1-i: R^2=1+1=2, R=\sqrt{2}, \tan(\theta)=\frac{-1}{1}=1, \theta=-45^0.$$

$$w=\sqrt{2}cis(-45^0)=\sqrt{2}cis(-\frac{360^0}{8}), w^{200}=2^{200/2}cis(-\frac{360^0}{8}200)=$$

$$=2^{100}cis(-360^0(25))=2^{100}cis(0^0).$$

$$\frac{z^{100}}{w^{200}}=\frac{2^{100}(cis(240))}{2^{100}(cis(0))}=cis(240^0)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f \\ 5b+6c & 5e+6f \\ 8b+9c & 8e+9f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 2a+4d \\ b & 2b+4e \\ c & 2c+4f \end{pmatrix}$$

מהשוואת המטריצות נקבל 6 משוואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות (1,1),(2,1),(3,1) נקבל את 3 המשוואות :

$$a+2b+3c=a \rightarrow 2b+3c=0$$

$$5b+6c=b \rightarrow 4b+6c=0$$

$$8b+9c=c \rightarrow 8b+8c=0$$

מהמקומות (2,2),(3,2) ומהצבת b=c=0 נקבל את 2 המשוואות :

$$5e+6f=2b+4e=4e \rightarrow e+6f=0$$

$$8e+9f=2c+4f=4f \rightarrow 8e+5f=0$$

ופתרונן הוא e=f=0. נציב במשואה של המקום (2,1) ונקבל :

$$2a+4d=d+2e+3f=d \rightarrow 2a+3d=0$$

ולסכום, המטריצות הן מהצורה :

$$\begin{pmatrix} -1.5d & d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תשובה 8

התשובה לא נכון ותרגיל 5 ממחיש את העובדה.

תשובה 9
לא, אם A היא מטריצה 3x3 אז עבור A– נקבל אותה צמודה כמו של A.

תשובה 10
לא, מספיקה דוגמא נגדית למשל המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא בעלת אלכסונים זהים ועדיין היא הפיכה.

התשובה כן נכון. השויון $AA^*=\det(A)I_n$ גורר כי השויון $\det(A)\det(A^*)=(\det(A))^n 1$ והעובדה שיש שתי שורות מתיחסות גוררת כי $\det(A^*)=0$ ולכן $\det(A)^{n-1}=0$ ולכן $\det(A)=0$. .

תשובה 11
התשובה נכון : הדטרמיננטה של B הוא תוצאת מודולו 2 של הדטרמיננטה של A, ואם של B שונה מ-0 אז גם של A שונה מ-0.