

מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשע"ט מועד א

יום ד כה אלול התשע"ט 25-9-2019

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבוני
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות שה"כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. שה"כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- $60+20+20=100$

בהצלחה.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 6y + 2z = 4 \\ 5x + 6y + 6z = -3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7 .

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} x + by + 2z = b - 1 \\ 3x + (b - 1)y + 2z = b \\ 4x + 7y + bz = 2b - 1 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד. רשום את הפתרון עבור b שעבורו יש אינסוף פתרונות.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 6 & j=i & 1 \leq i \leq n \\ 9 & j=i+1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ 4 & j=i-1 & 2 \leq i \leq n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4,5,6$.
- ב. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.
- ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .
- ד. פתור את המשוואה $Av=0$.

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+i)x + (2+i)y + (2+i)z = 0 \\ (4+i)x + (4+i)z = 6 \\ (6+i)x + (3+2i)y + (2-2i)z = 0 \end{array} \right.$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב x של הפתרון של המערכת.

שאלה 5 (10 נקודות)

$$\frac{(\sqrt{3}-i)^{16}}{(1-i)^{30}} \quad \text{א. חשב את}$$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3×3 ונתון כי $a_{1,1} = 1, a_{2,1} = 4, a_{3,1} = 5$ וכי

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

מצא את כל המטריצות האפשריות A . המקיימות את הנתונים

שאלה 7 (10 נקודות)

חשב את הדטרמיננט של המטריצה A המוגדרת להלן:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 2 & a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ 4 & a+b+c+d & a^2+b^2+c^2+d^2 & a^3+b^3+c^3+d^3 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון. כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3×3 הפיכה. נגדיר עוד מטריצה מסדר 3 על ידי שנכפול את השורה הראשונה ב-2, את השניה ב-3 ואת השלישית ב-3. אז המטריצה החדשה הפיכה.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3×3 הפיכה. נגדיר $B = A - I$ אז המטריצה B הפיכה.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נ
נתונה מטריצה A . נגדיר $B = (A)^* = adj(A)$ או $(B)^* = A$.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

לכל מטריצה A מתקיים $(A)^* \neq A$

לא נכון

נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)

נסח והוכח את משפט 5 הנקודות.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד
מההוכחה.

פתרונות
תשובה 1

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_1+S_2 \rightarrow S_2 \\ 3S_1+S_3 \rightarrow S_3}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 14 & 12 & 15 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_1+S_3 \rightarrow S_1 \\ 2S_2+S_3 \rightarrow S_3}} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{4S_3+S_2 \rightarrow S_2 \\ 6S_3+S_1 \rightarrow S_1}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 28 & 34 & 12 & 7 \\ 0 & 1 & 21 & 21 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{5S_1 \rightarrow S_1 \\ 2S_3 \rightarrow S_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ו נוכל לפתר את המערכת: $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ואכן

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 2 & b-1 \\ 3 & b-1 & 2 & b \\ 4 & 7 & b & 2b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{S_3-4S_1 \rightarrow S_3 \\ S_2-3S_1 \rightarrow S_2}]{S_2-3S_1 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & b & 2 & b-1 \\ 0 & -2b-1 & -4 & -2b+3 \\ 0 & 7-4b & b-8 & -2b+3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3+(b-8)S_2/4 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & b & 2 & b-1 \\ 0 & -2b-1 & -4 & -2b+3 \\ 0 & A & 0 & B \end{pmatrix}, B = (-2b+3)(1+(b-8)/4)$$

$$= (-2b+3)(b-4)/4, A = (7-4b) - (2b+1)(b-8)/4 = 28 - 16b - 2b^2 + 16b - b + 8$$

$$= -2b^2 - b + 36 = (4-b)(9+2b)$$

עבור $b=4$ למערכת יש אינסוף פתרונות. $b=-9/2$ אין פתרון עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד. נציב $b=4$ במערכת האחרונה ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+2S_1 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+y)/2 \\ y \\ z = 1.25 - 2.25y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.25 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -2.25 \end{pmatrix}$$

תשובה 3

$$A_6 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{n+1}) = 6 \det(A_n) - 36 \det(A_{n-1}) = 6(6 \det(A_{n-1}) - 36 \det(A_{n-2}))$$

$$-36 \det(A_{n-1}) = -216 \det(A_{n-2}), \det(A_1) = 6, \det(A_2) = 0, \det(A_3) = -216$$

ולכן נקבל

$$\det(A_n) = \begin{cases} 0 & n = 3k + 2 \\ (-216)^k & n = 3k \\ 6(-216)^k & n = 3k + 1 \end{cases}$$

ה. עבור $n \equiv 2 \pmod{3}$ הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור $n \equiv 2 \pmod{3}$ הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$\left(\left(\frac{27}{8}\right)^k, -\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{k-1}, 0, \left(\frac{27}{8}\right)^{k-1}, -\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{k-2}, 0, \left(\frac{27}{8}\right)^{k-2}, -\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{k-3}, 0, \dots \right)$$

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי שורה אמצעית ונקבל:

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= -(4+i)[(2+i)(2-2i) - (2+i)(3+2i)] \\
 &= -(4+i)[(1+i)(3+2i) - (2+i)(6+i)] = \\
 &= -(4+i)(2+i)(-1-4i) \\
 &= -(4+i)[(3-2+3i+2i) - (12-1+6i+2i)] \\
 &= (4+i)(2+i)(1+4i) - (4+i)(-10-3i) = \\
 &= (4+i)[(2-4+8i+i) + 10+3i] \\
 &= (4+i)(8+12i) = 4(8-3+2i+12i) = 4(5+14i) \\
 \det(A_x) &= 6[(2+i)(2-2i) - (2+i)(3+2i)] = \\
 &= 6(2+i)(-1-4i) = -6(2-4+8i+i) = 12-54i \\
 x &= \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{12-54i}{4(5+4i)} = \frac{(12-54i)(5-4i)}{4(25+16)} = \\
 &= \frac{60-216-48i-270i}{4(25+16)} = \frac{-156-318i}{164}
 \end{aligned}$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה A_y , ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל :

תשובה 5 א

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{3}-i)^{16}}{(1-i)^{30}} &= \frac{(2\text{cis}(-30))^{16}}{(\sqrt{2}\text{cis}(-45))^{30}} = \\ &= \frac{2^{16}\text{cis}(-480)}{2^{15}\text{cis}(-1350)} = 2\text{cis}(870) = \\ &= 2\text{cis}(150) = 2 \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -\sqrt{3}+i \end{aligned}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & d+2e \\ 3b+6c & 3e+6f \\ b+3c & e+3f \end{pmatrix}$$

$$\text{מהשוואת} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2a+4d \\ 2b & 2b+4e \\ 2c & 2c+4f \end{pmatrix}$$

המטריצות נקבל 6 משוואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות (1,1),(2,1),(3,1) נקבל את 3 המשוואות:

$$a + 2b = 2a \rightarrow 2b = a$$

$$3b + 6c = 2b \rightarrow 6c = -b$$

$$b + 3c = 2c \rightarrow b = c \rightarrow 2c = -6c \rightarrow c = 0, b = 0$$

$$\rightarrow 0 = 2b = a \rightarrow a = 0$$

ולכן נציב ונקבל :

$$d + 2e = 2a + 4d = 4d \rightarrow 3d = 2e$$

$$3e + 6f = 2b + 4e = 4e \rightarrow e = 6f$$

$$e + 3f = 2c + 4f = 4f \rightarrow e = f$$

$$\rightarrow 6f = f \rightarrow f = 0 \rightarrow e = 0 \rightarrow d = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. לכן הפתרון היחיד הוא המטריצה

תשובה 6

נסמן

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 4 & b & y \\ 5 & c & z \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} bz - cy & 5y - 4z & 4c - 5b \\ cx - az & z - 5x & 5a - c \\ ay - xb & 4x - y & b - 4a \end{pmatrix},$$

$$z - 5x = -6, 4x - y = 6 \rightarrow z = 5x - 6, y = 4x - 6,$$

$$5y - 4z = 20x - 30 - 20x + 24 = -6,$$

$$5a - c = -3, b - 4a = 3 \rightarrow b = 4a + 3, c = 5a + 3$$

$$4c - 5b = 20a + 12 - 20b - 15 = -3$$

$$ay - xb = a(4x - 6) - x(4a + 3) = -6a - 3x = 3$$

$$cx - az = (5a + 3)x - a(5x - 6) = 3x + 6a = -3$$

$$bz - cy = (4a + 3)(5x - 6) - (5a + 3)(4x - 6) =$$

$$= 3x + 6a = -3$$

$$x = -1 - 2a$$

ולכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1-2a \\ 4 & 4a+3 & -8a-10 \\ 5 & 5a+3 & -10a-11 \end{pmatrix}.$$

תשובה 7

נתונה המטריצה A ונפעל עליה פעולות יסודיות

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 2 & a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ 4 & a+b+c+d & a^2+b^2+c^2+d^2 & a^3+b^3+c^3+d^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{S_2-2S_1 \rightarrow S_2 \\ S_3-S_1-S_3 \rightarrow S_4, S_3-S_1-S_2 \rightarrow S_3}]{S_4-S_1-S_3 \rightarrow S_4, S_3-S_1-S_2 \rightarrow S_3} \\ & \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a+b & b^2+ab+a^2 \\ 1 & a+c & c^2+ac+a^2 \\ 1 & a+d & d^2+ad+a^2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{S_2-S_1 \rightarrow S_2 \\ S_3-S_1 \rightarrow S_3}]{S_3-S_1 \rightarrow S_3} (b-a)(c-a)(d-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a+b & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2+a(c-b) \\ 0 & d-b & d^2-b^2+a(d-b) \end{pmatrix} = \\ & (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \det \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+d \end{pmatrix} = \\ & = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

תשובה 8

נכון. על ידי הוצאת הקבועים מכל שורה $\det(B) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \det(A) = 30 \det(A)$. כיון ש A הפיכה אז הדטרמיננט שלה שונה מ-0, ולכן גם זו של B ולכן B הפיכה.

תשובה 9

לא נכון. דוגמא נגדית $A=I \rightarrow A-I=0$

תשובה 10

לא נכון דוגמא נגדית $(B)^* = B \neq A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (A)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

תשובה 11

לא, דוגמא נגדית $A = \begin{pmatrix} c & c \\ c & c \end{pmatrix}$.