מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב מסלול ערב-

סמסטר קיץ התשע״ד מועד ב,יום ד,יא כסלו התשע״ה 3-12-2014

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה״כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- 60+20+20=100

בהצלחה.

<u>חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.</u>

<u>שאלה 1 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +3y & +3z & =1 \\ 3x & -2y & -4z & =2 \\ 3x & +y & +3z & =-3 \end{array}\right\}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 2 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +(b-1)y & +z & =2b-3 \\ x & +2y & +(b+1)z & =b \\ 4x & +5y & +6z & =5 \end{array}\right\}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 & 3x+1 & 4x+1 \\ x & 2x & 3x & 4x \\ x^2+x & 4x^2+2x & 9x^2+3x & 16x^2+4x \\ x^3+x & 8x^3+2x & 27x^3+3x & 64x^3+4x \end{pmatrix}$$

חשב עבורה את הדטרמיננט ומצא עבור אלו ערכי x היא הפיכה.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j}=\begin{cases} i & j=i-1 \quad 2\le i\le n \\ i & j=i+1 \quad 1\le i\le n-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An). ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n. ד. פתור את המשואה Av=0.

שאלה 5 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{1,1}=1, a_{1,2}=2, a_{1,3}=3$

ונתונים כל הדטרמיננטים של המינורים הבאים מ-A

$$M_{2,1}=6, M_{2,2}=12, M_{2,3}=6, M_{3,1}=-3, M_{3,2}=-6, M_{3,3}=-3,$$

מצא את איברי A.

שאלהה 6 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} (1+i)x & +(2-i)y & & =0 \\ & (4+i)y & -(3-i)z & =2 \\ (6+i)x & & +(2-i)z & =3 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב z של הפתרון של המערכת.

שאלה 7 (10 נקודות)

א. חשב את $\frac{(1-\sqrt{3}i)^{100}}{(1+i)^{200}}$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקיימות את המשואה :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונות מטריצות הפיכות A,B, אז המטריצה A+B היא הפיכה.

נכון | לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונות מטריצות רבועיות ממימד n. אז det(A+B)=det(A)+det(B).

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A ובה אחת השורות שווה לאחת העמודות. אז A איננה הפיכה.

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

מספר המטריצות 2x2 מעל השדה מודולו 2 $\mathbb{Z}_2$ הוא סופי.

נכון לא נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)

הוכח כי אם מטריצה רבועית A היא הפיכה אז הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_1-S_2\to S_1]{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_1+2S_2\to S_1]{S_2+S_3\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-S_3\to S_3]{5S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & -5 & 2 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ואכן קל לראות כי

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}3&2&2\\0&2&5\\4&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3\\3&5&3\\3&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&21&21\\21&15&21\\28&28&36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

כעת נוכל לפתור את המערכת :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\0&2&5\\4&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\24\\32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix}1&b-1&1&2b-3\\1&2&b+1&b\\4&5&6&5\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-4S_2\to S_3]{S_2\to S_1,S_1-S_2\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&b+1&b\\0&b-3&-b&b-3\\0&-3&2-4b&5-4b\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2+(b-3)(S_3)/3\to S_3]{-S_3/3\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&b+1&b\\0&1&\frac{4b-2}{3}&\frac{4b-5}{3}\\0&0&A&B\end{pmatrix}.$$

$$A=\frac{-3b-(b-3)(4b-2)}{3}=\frac{-3b-(4b^2-12b-2b+6)}{3}=$$

$$=\frac{-4b^2+11b-6}{3}=\frac{-(4b-3)(b-2)}{3},$$

$$B=\frac{-3(b-3)-(b-3)(5b-2)}{3}=-(b-3)\frac{5b+1}{3}$$

עבור b=2,0.75 למערכת יש אפס פתרונות. עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

$$A=\begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 & 3x+1 & 4x+1 \\ x & 2x & 3x & 4x \\ x^2+x & 4x^2+2x & 9x^2+3x & 16x^2+4x \\ x^3+x & 8x^3+2x & 27x^3+3x & 64x^3+4x \end{pmatrix}.$$

נפעיל על A פעולות יסודיות אשר תפשטנה אותה ונחשב את הדטרמיננט של המטריצה המתקבלת:

$$\begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 & 3x+1 & 4x+1 \\ x & 2x & 3x & 4x \\ x^2+x & 4x^2+2x & 9x^2+3x & 16x^2+4x \\ x^3+x & 8x^3+2x & 27x^3+3x & 64x^3+4x \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-S_2\to S_4]{S_1-S_2\to S_1,S_3-S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2x & 3x & 4x \\ x^2 & 4x^2 & 9x^2 & 16x^2 \\ x^3 & 8x^3 & 27x^3 & 64x^3 \end{pmatrix}$$

הפעולות היסודיות שמרו על ערך הדרמיננט וקבלנו מטריצה חדשה שהיא vdm וערך הדטרמיננט שלה הוא $(2x-x)(3x-x)(4x-x)(3x-2x)(4x-2x)(4x-3x)=12x^6$ והיא הפיכה לכל x השונה מ-0.

תשובה 4

$$A_6=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\2&0&2&0&0&0\\0&3&0&3&0&0\\0&0&4&0&4&0\\0&0&0&5&0&5\\0&0&0&0&6&0\end{pmatrix}$$

נשים לב כי $\det(A_n)=-n(n-1)\det(A_{n-2})$ וכי $\det(A_1)=0, \det(A_2)=-2$ ולכן נקבל

$$\det(A_n)=\begin{cases}0 & n=2k-1\\(-1)^k n! & n=2k\end{cases}$$

ה. עבור מ זוגי הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור n איזוגי הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$(x,0,x,0,\cdots,0,x)$$

תשובה 5
נסמן את איברי המטריצה

$\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&c\\x&y&z\end{pmatrix}$ ונרשום את הנתונים במשוואות:

$$M_{2,1}=2z-3y=6, M_{2,2}=z-3x=12, M_{2,3}=y-2x=6,$$
$$M_{3,1}=2c-3b=-3, M_{3,2}=c-3a=-6, M_{3,3}=b-2a=-3$$

נקבל שתי מערכות של שלשה משתנים נפתור ונקבל:

$$z = 3x + 12, y = 2x + 6, c = 3a - 6, b = 2a - 3$$

ונקבל את כל המטריצות הללו

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a-3 & 3a-6 \\ x & 2x+6 & 3x+12 \end{pmatrix}$$

כדרוש

תשובה 6

א. נפתח את הדטרמיננט לפי שורה עליונה ונקבל:

$$\det(A) = (1+i)(4+i)(2-i) + (2-i)(3-i)(6+i) =$$
$$= (2-i)[(4+5i-1) - (18-3i+1)] = (2-i)(-16+8i).$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ax,
ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי השורה העליונה ושוב נקבל:

$$\det(A_x) = (1+i)(4+i)3 - (2-i)2(6+i) =$$
$$= 3(4+5i-1) - 2(12-4i+1) = -17+23i.$$

$$x=\frac{\det(A_x)}{\det(A)}=\frac{-17+3i}{(2-i)(-16+8i).}=$$

$$\frac{(-17+3i)(2+i)(-16-8i)}{5\cdot 320.}=$$

$$=\frac{-8(-17+3i)(2+i)^2}{5\cdot 320.}=\frac{-(-17+3i)(3+2i)}{200.}=$$

$$\frac{-[(-51-6)-25i]}{200.}=\frac{57+25i}{200.}.$$

כדרוש.

תשובה 7 סעיף א

נציג מונה ומכנה בצורה קטבית.

$$\frac{(1-\sqrt{3}i)^{100}}{(1+i)^{200}}$$

$$1-i\sqrt{3}: R^2=1+3=4, R=2, \tan(\theta)=\frac{-\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}, \theta=120^0.$$

$$z=2cis(120^0)=2cis(\frac{360^0}{3}), z^{100}=2^{100}cis(\frac{360^0}{3}100)=$$

$$=2^{100}cis(360^0(33+\frac{1}{3}))=2^{100}cis(120^0)$$

$$1+i: R^2=1+1=2, R=\sqrt{2}, \tan(\theta)=\frac{1}{1}=1, \theta=45^0.$$

$$w=\sqrt{2}cis(45^0)=\sqrt{2}cis(\frac{360^0}{8}), w^{200}=2^{200/2}cis(\frac{360^0}{8}200)=$$

$$=2^{100}cis(360^0(25))=2^{100}cis(0^0).$$

$$\frac{z^{100}}{w^{200}}=\frac{2^{100}(cis(120))}{2^{100}(cis(0))}=cis(120^0)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f \\ 4b+5c & 4e+5f \\ 8b+9c & 8e+9f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+3d \\ b & 2b+3e \\ c & 2c+3f \end{pmatrix}$$

מהשוואת המטריצות נקבל 6 משוואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות (1,1),(2,1),(3,1) נקבל את 3 המשוואות :

$$a+2b+3c=a \rightarrow 2b+3c=0$$
$$4b+5c=b \rightarrow 3b+6c=0$$
$$8b+9c=c \rightarrow 8b+8c=0$$

מהמקומות (2,2),(3,2) ומהצבת b=c=0 נקבל את 2 המשוואות :

$$4e+5f=2b+3e=3e \rightarrow e+5f=0$$
$$8e+9f=2c+3f=3f \rightarrow 8e+6f=0$$

ופתרונן הוא e=f=0. נציב במשואה של המקום (2,1) ונקבל :

$$2a+3d=d+2e+3f=d \rightarrow 2a+2d=0$$

ולסכום, המטריצות הן מהצורה :

$$\begin{pmatrix} -d & d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נמוק קצר

תשובה 8

התשובה לא נכון ולדוגמא עבור B=-A=I אז A, B הפיכות אבל A+B=0 איננה הפיכה.

תשובה 9

התשובה לא נכון ולדוגמא עבור B=-A=I בעלות ממד 2, אז det(A)=det(B)=1 אבל det(A+B)=det(0)=0.

תשובה 10

לא, מספיקה דוגמא נגדית למשל המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא בעלת שורה ועמודה זהות ועדיין היא הפיכה.

תשובה 11

התשובה נכון: מספר המטריצות 2x2 מעל $\mathbb{Z}_2$ הוא 16.