המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב תלמידי הנדסאים-

סמסטר קיץ התשס"ט מועד ב, יום ד, כד חשון התש"ע, 11-11-2009

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- במבחן 9 שאלות ב-3 חלקים.
- בחלק הראשון 6 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. סה"כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 5 שאלות במשקל של 4 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לכתוב במחברת האם התשובה היא נכון או לא נכון, ולהוסיף נמוק קצר. התשובה תהיה במחברת. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה"כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות.

60+20+20=100

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

חלק א- שאלות 1-6 כלן חובה. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +3z & =1 \\ 2x & +4y & +4z & =2 \\ 3x & & +z & =0 \end{array}\right\}$$

מעל השדה מודולו חמש Z_5.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (1+i)x & +2y & =1 \\ (1-i)x & +2y & =1 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים C.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 3 (10 נקודות)</u>

נתונה המטריצה הצמודה
$$A^* = adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
של המטריצה A :

וידוע כי det(A)=-1, מצא את כל אברי A.

<u>שאלה 4 (10 נקודות)</u>

מצא את כל המספרים z המקיימים
$$z^8 = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

נתונה המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3a & 7a^2 & a^3 \\ 2 & 6b & 14b^2 & 2b^3 \\ 5 & 15c & 35c^2 & 5c^3 \\ 1 & 3d & 7d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

חשב את det(A).

<u>שאלה 6 (10 נקודות)</u> : <u>אודות חומר לקריאה עצמית)</u>

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 6 \\ 9 & -14 & 21 \end{pmatrix}$$

א. מצא פרוק LU של המטריצה

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

ב. השתמש בתשובה של סעיף א ופתר את המערכת

חלק ב

בחלק זה חמש שאלות בנות 4 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב במחברת . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 7 (4 נקודות)

נתונות B,A מטריצות רבועית והפיכות מסדר n .אז המטריצה $A+B$ תמיד איננה הפיכה.

שאלה 8 (4 נקודות)

נתונות A, מטריצה רבועית מסדר n . נביט במטריצה $B=2A$ שכל איבריה הם פי 2 מאיברי A המתאימים. אז $\det(B)=2^n\det(A)$.

שאלה 9 (4 נקודות)

ידוע כי למערכת המשואות $Av=0$ יש פתרון יחיד, כאשר A מטריצה רבועית מסדר n מעל R. אז קים וקטור c בעל התכונה שלמערכת המשואות $Av=c$ יש אינסוף פתרונות.

שאלה 10 (4 נקודות)

-

נתונות C,B,A מטריצות רבועית מסדר n וידוע כי מתקים שויון כפל מטריצות $AB=AC$.

אז נובע שויון המטריצות $B=C$.

שאלה 11 (4 נקודות)

נתונות מטריצות B,A מעל שדה F כך שמתקיים השויון AB=0. אז לפחות אחד משתי המטריצות חיבת להיות מטריצת ה-0.

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)

הוכח כי לכל n , Z_n הוא חוג מתחלף עם יחידה.

וכן הוכח כי Z_n הוא שדה אם ורק אם n הוא ראשוני.

מותר לך להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[4S_3\leftrightarrow 2S_2]{S_1-3S_3\to S_1}
\begin{pmatrix} 1 & -10 & -3 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 8 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}
=
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow[S_2-3S_3\to S_2]{S_1-2S_3\to S_1}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
=
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|ccc} & 3 & 1 & 2 \\ I & 0 & 4 & 4 \\ & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)
$$

ואכן קל לראות כי $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&4&4\\1&2&0\end{pmatrix}$ כעת נוכל לפתר את המערכת:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&4&4\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\8\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

תשובה 2

א.

$$\det(A)=2(1+i)-2(1-i)=2+2i-2+2i=4i.$$

$$(\det(A))^{-1}=\frac{1}{4i}=\frac{1(-i)}{4i(-i)}=\frac{-i}{4}.$$

וכעת:

$$A_x=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\det(A_x)=2-2=0,x=0\frac{-i}{4}=0.$$

$$A_y=\begin{pmatrix}1+i&1\\1-i&1\end{pmatrix},\det(A_y)=2i,y=2i\frac{-i}{4}=\frac{1}{2}$$

ואכן זהו הפתרון הנכון:

תשובה 3

$$A^*=adj(A)=\begin{pmatrix}-3&2&0\\3&1&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

ולכן אפשר למצוא את

ההפוכה של A :

$$A^{-1}=\frac{adj(A)^t}{\det(A)}=-\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

כעת אפשר למצוא את A $A=(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 4\\ 4 & 10 & 3\end{pmatrix}$

תשובה 4

$$z^8=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=w.|w|^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1,\arg(w)=240,$$

$$z^8=cis(240+360k)=cis(120(2+3k))\rightarrow z=$$

$$cis(15(2+3k))=cis(30+45k)=cis(30)cis(45k)=$$

$$=cis(30)cis(45)^k=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2})^k.$$

תשובה 5

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3a & 7a^2 & a^3 \\ 2 & 6b & 14b^2 & 2b^3 \\ 5 & 15c & 35c^2 & 5c^3 \\ 1 & 3d & 7d^2 & d^3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 3a & 7a^2 & a^3 \\ 1 & 3b & 7b^2 & b^3 \\ 5 & 15c & 35c^2 & 5c^3 \\ 1 & 3d & 7d^2 & d^3 \end{pmatrix} =$$

$$= 10\det\begin{pmatrix} 1 & 3a & 7a^2 & a^3 \\ 1 & 3b & 7b^2 & b^3 \\ 1 & 3c & 7c^2 & c^3 \\ 1 & 3d & 7d^2 & d^3 \end{pmatrix} = 210\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} =$$

$$= 210\det(VDM(a,b,c,d)) =$$

$$= 210(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c).$$

תשובה 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 6 \\ 9 & -14 & 21 \end{pmatrix}$$

ג. מצא פרוק LU של המטריצה

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

ד. השתמש בתשובה של סעיף א ופתר את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 6 \\ 9 & -14 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-9S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

כדי למצוא את L נכפל את ההפוכות של שלש המטריצות האלמנטריות אשר מתאימות לפעולות האלמנטריות שעשינו, ובסדר הפוך:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן

$$LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\9&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&2&-3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\3&-4&6\\9&-14&21\end{pmatrix}=A$$

ואז:

$$Av=LUv=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\9&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&2&-3\\0&0&0\end{pmatrix}v=\begin{pmatrix}2\\5\\16\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$Uv=L^{-1}\begin{pmatrix}2\\5\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-3&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{cases}x-2y+3z=2\\ \quad 2y-3z=-1\end{cases}$$

ומכאן נמשיך עם פעולות כרגיל.

תשובה 7

התשובה לא נכון:

יתכן כי מטריצת הסכום הפיכה ויתכן כי לא.

דוגמא שכן: $I+I=2I$

דוגמא שלא: $I+(-I)=0$

תשובה 8

התשובה נכון: הוצאת הקבוע 2 מאיזושהי שורה של B, יוצרת מטריצה חדשה שהדטרמיננט שלה הוא חצי מהדטרמיננט של המטריצה המקורית. זאת נעשה n פעמים, עבור כל שורה, ונקבל את הטענה.

תשובה 9
התשובה לא נכון כי עצם העובדה שלמערכת הראשונה יש פתרון יחיד שקולה לעובדה ש $\det(A)\neq 0$, והעובדה שלמערכת השניה יש אינסוף פתרונות שקולה לכמה עובדות, ואחת מהעובדות היא ש $\det(A)=0$, ולא יתכן כזה מצב.

תשובה 10
התשובה לא נכון: $AB = AC \to AB - AC = 0 \to A(B-C) = 0$
אבל אי אפשר לצמצם בהכרח את A. דוגמא נגדית:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

תשובה 11
התשובה לא נכון: דוגמא נגדית
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$