<u>מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב-מסלול הנדסאי ערב-</u>
<u>מועד ב. יום ד, יג טבת התשס"ז 3-1-2007</u>

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- מותרים מחשבונים
- יש לכתוב את התשובות לשאלות בטופס המבחן. יש לכתוב תשובות סופיות בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה והן משמשות כטיוטה.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- במבחן 15 שאלות ב-5 חלקים.
- בחלק הראשון 9 שאלות במשקל של 7 נקודות כל אחד. ענה על 8 שאלות בלבד. אם תענינה יותר מ-8 שאלות תבחרנה 8 השאלות הראשונות. סה"כ 56 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני שאלה אחת בת משקל של 12 נקודות (עם חמש תשובות חלקיות) .
- בחלק השלישי 3 שאלות במשקל של 4 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה. סה"כ 12 נקודות בחלק השלישי.
- בחלק הרביעי שאלת נסוח אחת בת משקל של 10 נקודות.
- בחלק החמישי שאלת הוכחה אחת בת משקל של 10 נקודות.

56+12+12+10+10=100

<u>נקוד חלקי</u>

- לחלק מהשאלות בחלק א, ולשאלה היחידה בחלק ב יש תשובות לנקוד חלקי.
- יתכן לצבור נקוד חלקי או בשיטת גאוס או בשיטה המבוססת על דטרמיננטים, אך לא בשתיהן.
- בכל תשובה או תשובה חלקית יש לכתוב תשובה סופית בלבד.

בהצלחה.

<u>חלק א- שאלות 1-9 מהן יש לבחור 8 שאלות. משקל כל שאלה 7 נקודות.</u>

<u>שאלה 1(7 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x \quad +3y \quad +(3b-1)z \quad =5b \\ 2x \quad +7y \quad +z \quad =-b \\ 4x \quad +(6b+1)y \quad +11z \quad =18 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

<u>תשובת ביניים</u>: (4 נקודות) ענה על <u>אחת</u> <u>(בלבד)</u> משתי השאלות הבאות:

<u>ביניים 1</u>. באם פתרת לפי שיטת גאוס: כתוב את המערכת בשלב שבו יש אפסים מתחת האלכסון.

<u>ביניים 2</u>. באם פתרת על ידי דטרמיננט, כתוב את הדטרמיננט.

.

תשובה מלאה(3 נקודות): ענה על כל השאלות הבאות: ענה תשובה סופית בלבד:
חלק מהערכים הנכונים של b הם שברים.

מלאה 1: מהו/מהם הערכים של b עבורו/עבורם יש למערכת אינסוף פתרונות?
b=

מלאה 2: מהו/מהם הערכים של b עבורו/עבורם אין למערכת פתרונות?
b=

מלאה 3: מהו/מהם הערכים של b עבורו/עבורם יש למערכת פתרון יחיד?
b=

שאלה 2(7 נקודות)

חשב את המספר המרוכב $\frac{(1+i)^{195}}{(i-1)^{193}}$ בצורה קרטזית.

חלקית א- בטא את המונה בצורה כלשהיא. תשובה

חלקית ב- בטא את המכנה בצורה כלשהיא. תשובה

תשובה מלאה:

שאלה 3(7 נקודות)

נתונה המטריצה הבאה שרכיביה שיכים לשדה Z_2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב במחברתך את A^{-1} .

תשובת בינים:(4 נקודות) ענה על אחת (בלבד) משתי השאלות הבאות:

בינים 1. באם פתרת לפי שיטת גאוס עבור מטריצה 4x8, כתוב את המערכת בשלב שבו המטריצה הימנית מתוך המטריצה 4x8 היא בעלת אפסים מתחת האלכסון.

בינים 2. באם פתרת לפי שיטת ה-adj(A), כתוב את det(A).

<u>תשובה מלאה</u>(3 נקודות): ענה תשובה סופית בלבד: כתב את השורה הראשונה של A^{-1} :

<u>שאלה 4(7 נקודות)</u>

מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}$$

<u>תשובת בינים</u>: (4 נקודות) כתוב כאן את מערכת המשואות:

תשובה מלאה(3 נקודות): כתוב כאן את כל המטריצות A המבוקשות.

שאלה 5(7 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 6x6 אשר מוגדרת על ידי הנוסחה: $A_{i,j}=i-2j$ עבור $1\le i,j\le 6$. חשב במחברתך את det(A).

תשובת ביניים (4 נקודות): כתוב כאן את המטריצה:

תשובה מלאה: (3 נקודות)
det(A)=

שאלה 6(7 נקודות)

חשב במחברתך את השארית בחלוקה ל-9 של הבטוי: $(2^{1000}-1)(3^{1000}-1)(5^{1000}-1)$.

<u>שאלה 7(7 נקודות)</u>

נתונה המערכת המדורגת קנונית

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} & | & 13 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & a_{2,4} & | & 14 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & | & 15 \end{pmatrix}$$

ונתון פתרון פרטי $v_1=(1,2,3,4)^T$. רשום את הפתרון הכללי v. :

<u>שאלה 8(7 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{1,1}=1, a_{1,2}=3, a_{1,3}=5$ ונתונים כל הדטרמיננטים של המינורים הבאים מ-A, $M_{1,1}=-199, M_{1,2}=-61$, $M_{1,3}=3$, $M_{2,1}=-127$, $M_{2,2}=-39$, $M_{2,3}=2$, $M_{3,1}=-62$, $M_{3,2}=-19$, $M_{3,3}=1$. מצא את כל אברי A.

<u>שאלה 9(7 נקודות)</u>

נתונה מטריצה רבועית מסדר n המסמנת A, וידוע כי $\det(A)=5$. ניזכר במטריצה הצמודה של A, , המסומנת $A^*=\mathrm{adj}(A)$ והמוגדרת על ידי:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det(A)} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

חשב את $\det(A^*)$.

<u>חלק ב</u>

בחלק זה שאלה אחת . לשאלה יש חמש תשובות בינים של נקודה אחת כל אחת, ושני סעיפי תשובה מלאה של 6 נקודות כל אחת, סה"כ 12 נקודות.

<u>שאלה 10(12 נקודות)</u>

נתונה מטריצה רבועית A_n מסדר nxn אשר מוגדרת על ידי :

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & |i-j| \neq 1 \\ i+j-2 & |i-j| = 1 \end{cases}$$

<u>תשובות בינים</u>: ענה על כל סעיפי הבינים:

<u>בינים א (נקודה אחת).</u> כתוב כאן את המטריצה A_4

בינים ב(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_1)$. $\det(A_1)=$

בינים ג(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_2)$. $\det(A_2)=$

בינים ד(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_3)$. $\det(A_3)=$

בינים ה(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_4)$. $\det(A_4)=$

מלאה א.(3 נקודות) כתוב את $\det(A_n)$. כפונקציה של n

$\det(A_n)=$

נביט במערכת $A_nv=b$ כאשר A_n הוגדרה בתחילת השאלה

$b=(0,0,\ldots,0)^T$ ו- $v=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$.

<u>מלאה ב. (4 נקודות)</u> כתוב את הפתרון של המערכת $A_nv=b$ כפונקציה של n.

תשובה:

<u>חלק ג</u>

בחלק זה שלש שאלות בנות 4 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה.

<u>שאלה 11 (4 נקודות)</u>

מטריצה רבועית A מעל R נקראת אנטי סימטרית, אם לכל i,j מתקיים כי $A_{i,j}=-A_{j,i}$. נביט על $A^*=adj(A)$ המוגדרת בשאלה 9. האם הטענה הבאה נכונה?

$A^*=adj(A)$ גם היא מטריצה רבועית אנטי סימטרית.

תשובה כן לא

<u>שאלה 12 (4 נקודות)</u>

נתונה מערכת משואות לינארית $Av=b$, ושני פתרונות שלה v,w. אז $v-w$ הוא פתרון של המערכת $Av=0$.

תשובה   כן   לא

שאלה 13 (4 נקודות)

קימת פעולה אלמנטרית אשר הפעלתה פעמים אינה משנה את המטריצה המקורית.

תשובה   כן   לא

חלק ד- שאלת נסוח.

שאלה 14(10 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A. נסח משפט אשר כולל 6 טענות שקולות ואשר אחת מהטענות השקולות היא ש A היא מטריצה הפיכה.

חלק ה- שאלת הוכחה

שאלה 15(10 נקודות)

הוכח כי אם A מטריצה הפיכה אז $\det(A)\neq 0$. מותר להסתמך על טענות עזר, אבל יש לנסח אותן במדויק.

תשובות

<u>תשובה לשאלה 1</u>

פתרון דרך ראשונה- על ידי שיטת גאוס

נעבור למערכת משוואות מטריציאלית ונבצע פעולות אלמנטריות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 2 & 7 & 1 & -b \\ 4 & 6b+1 & 11 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 0 & 1 & 3-6b & -11b \\ 0 & 6b-11 & 15-12b & 18-20b \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-(6b-11)S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 0 & 1 & 3-6b & -11b \\ 0 & 0 & A & B \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$A = 15 - 12b - [(3-6b)(6b-11)] = 3(5-4b) - 3[(1-2b)(6b-11)] =$$
$$= 3[5 - 4b - (6b - 11 - 12b^2 + 22b)] = 3[16 - 32b + 12b^2] =$$
$$12[4 - 8b + 3b^2] = 12(b-2)(3b-2).$$

$$B = 18 - 20b + 11b(6b-11) = 18 - 20b + 66b^2 - 121b =$$
$$= 66b^2 - 141b + 18 = 3(22b^2 - 47b + 6) = 3(b-2)(22b-3)$$

אם b=2 אז A=B=0 ואז יש אינסוף פתרונות. אם b=2/3 אז A=0≠B ואז אין פתרונות.

תשובות בינים: המטריצה האחרונה היא תשובת בינים עבור דרך ראשונה.
וכמו כן:מכפלת אברי האלכסון של המטריצה האחרונה הוא הדטרמיננט והערך הוא 12(b-2)(3b-2).

<u>תשובה לשאלה 2.</u>

נציג מונה ומכנה בצורה קטבית.

$$1+i : R^2 = 1+1 = 2, R = \sqrt{2}, \tan(\theta) = \frac{1}{1} = 1, \theta = 45^0.$$

$$z = \sqrt{2}cis(45^0) = \sqrt{2}cis(\frac{360^0}{8}), z^{195} = 2^{97.5}cis(\frac{360^0}{8}195) =$$
$$= 2^{97.5}cis(360^0(24+\frac{3}{8})) = 2^{97.5}cis(135^0)$$

$$i-1: R^2 = 1+1 = 2, R = \sqrt{2}, \tan(\theta) = \frac{1}{-1} = -1, \theta = 135^0.$$

$$w = \sqrt{2}cis(135^0) = \sqrt{2}cis(3\frac{360^0}{8}), w^{193} = 2^{86.5}cis(3\frac{360^0}{8}(8\cdot 24+1)) =$$

$$= 2^{86.5}cis(360^0(72+\frac{3}{8})) = 2^{86.5}cis(135^0).$$

$$\frac{z^{195}}{w^{193}} = \frac{2^{87.5}(cis(135))}{2^{86.5}(cis(135))} = 2.$$

<u>תשובה לשאלה 3</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+S_1\to S_4]{S_3+S_1\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+S_3\to S_3]{S_3+S_2\to S_4,\, S_3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+S_3\to S_4]{S_3+S_1\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

וזוהי אכן ההפוכה כפי שקל לראות. הדטרמיננט הוא 1 (לא יכול להיות 0).

<u>תשובה לשאלה 4</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & d+3f \\ 4a+5b & 4d+5e \\ 8b+4c & 8e+4f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3d & 4d \\ b+3e & 4e \\ c+3f & 4f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3c & d+3f \\ 4a+5b & 4d+5e \\ 8b+4c & 8e+4f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+3d & 4d \\ b+3e & 4e \\ c+3f & 4f \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3(c-d) & 3(f-d) \\ 4a+4b-3e & 4d+e \\ 8b+3c-3f & 8e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}$$

מהשואת המטריצות נקבל 6 משואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות (1,1),(1,2),(2,2) נקבל את 3 המסקנות c=d=f,e=-4e : נציב ונקבל

$$8e = 32 \rightarrow e = 4 \rightarrow c = d = f = -1$$
$$8b - 3 + 3 = 16 \rightarrow b = 2$$
$$4a + 8 - 12 = 8 \rightarrow a = 3$$

ולסכום, המטריצה היחידה היא:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ואכן מטריצה זו מקימת את הדרוש.

<u>תשובה לשאלה 5</u>

נכתב את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -7 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & -7 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$ נפעיל את

הפעולה $S_3-S_2\rightarrow S_3$ ורק אחר כך את הפעולה $S_2-S_1\rightarrow S_2$ ונקבל מטריצה בעלת אותו דטרמיננט:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & -7 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$ מכיון שיש

במטריצה שתי שורות זהות, הדטרמיננט הוא 0.

<u>תשובה לשאלה 6</u>

קל לראות כי $2^6=5^6=1, 3^2=0 \bmod 9$. כיון שמתקים $1000=166\cdot 6+4$ אז

$$2^{1000}=2^{166\cdot 6+4}=(2^6)^{166}2^4=1\cdot 16=7 \bmod 9,\ 2^{1000}-1=6 \bmod 9$$

$3^{1000}=3^{2\cdot 500}=(3^2)^{500}=0 \bmod 9,\ 3^{1000}-1=8 \bmod 9$

$5^{1000}=5^{166\cdot 6+4}=(5^6)^{166}5^4=1\cdot 625=4 \bmod 9,\ 5^{1000}-1=3 \bmod 9$

ולכן,

$(2^{1000}-1)(3^{1000}-1)(5^{1000}-1)=6\cdot 8\cdot 3=0 \bmod 9$

<u>תשובה לשאלה 7</u>

נציב את שני ה-1-ים הידועים ונקבל את המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & 1 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix}$$

כעת יש לשים את ה-1 השלישי. קימות שלש אפשרויות.

או שהוא במקום 3,3 או במקום 3,4 או שאין בכלל 1 שלישי.

אפשרות ראשונה : ה-1 השלישי במקום 3,3

במקרה זה נציב במטריצה ונקבל:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{1,4} \\ 0 & 1 & 0 & a_{2,4} \\ 0 & 0 & 1 & a_{3,4} \end{pmatrix}$$

נציב את הנתונים ונקבל שתי מערכות של 3 משוואות כל אחת

$$1+4a_{1,4}=13, 2+4a_{2,4}=14, 3+4a_{3,4}=15$$

נפתר ונקבל

$$a_{1,4}=a_{2,4}=a_{3,4}=3$$

אפשרות שניה : ה-1 השלישי במקום 3,4

במקרה זה נציב במטריצה ונקבל:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} & 0 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נציב את הנתונים ונקבל שתי מערכות של 3 משוואות כל אחת

$$1+3a_{1,3}=13,2+4a_{2,3}=14,4=15$$

ונקבל סתירה.

אפשרות שלישית : אין בכלל 1 שלישי, השורה משלישית נופלת, ונקבל סתירה: 0x+0y+0z+0w=15

ולכן קבלנו מערכת יחידה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ופתרונה:

$$(x, y, z, w) = (13 - 3w, 14 - 3w, 15 - 3w, w)$$
$$= (13, 14, 15, 0) + w(-3, -3, -3, 1)$$

ובמקרה ש-$w=4$ נקבל את הפתרון v_1.

<u>תשובה לשאלה 8</u>

נרשם את המינורים במטריצת מינורים:

$$M(A) = \begin{pmatrix} -199 & -61 & 3 \\ -127 & -39 & 2 \\ -62 & -19 & 1 \end{pmatrix}$$

נוסיף את הסימן $(-1)^{i+j}$ ונבצע שחלוף, ונקבל את הצמודה של A:

$$A^* = \begin{pmatrix} -199 & 127 & -62 \\ 61 & -39 & 19 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

מתוך A נתונה השורה הראשונה, ונקבל:

A=(1,3,5). נכפל ונקבל שורה ראשונה של *AA וזוהי (-1,0,0). לכן det(A)=-1. נחלק ב- (-1) ונקבל:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 199 & -127 & 62 \\ -61 & 39 & -19 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

מתוך זה נמצא את A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 13 & 1 \\ 5 & 17 & -14 \end{pmatrix}$$

תשובה לשאלה 9

$$A^{-1}=\frac{A^*}{\det(A)}\to A^*=\det(A)A^{-1}\to$$

$$\to\det(A^*)=\det(A)^n\det(A^{-1})\to$$

$$\to\det(A^*)=\det(A)^n\det(A^{-1})\to$$

$$\to\det(A^*)=\det(A)^n\det(A)^{-1}=\det(A)^{n-1}$$

ולכן נוכל לעשות פעולות אלמנטריות ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1+i & i & 5+2i \\ i & 1-i & -3+8i \end{pmatrix} \xrightarrow{(1-i)S_1 \to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+i & 7-3i \\ i & 1-i & -3+8i \end{pmatrix} \xrightarrow{(i/2)S_1 \to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} i & -(1-i)/2 & (3+7i)/2 \\ i & 1-i & -3+8i \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 - S_1 \to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} i & -(1-i)/2 & (3+7i)/2 \\ 0 & 3(1-i)/2 & (-9+9i)/2 \end{pmatrix}.$$

ונקבל

$$y = \frac{-9+9i}{3(1-i)} = -3$$

נציב ונקבל x=5.

<u>תשובה לשאלה 10</u>

סעיף א

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

סעיף ב det=0

סעיף ג det=-1

סעיף ד det=0

סעיף ה det=9

מלאה א

נפתח לפי השורה והעמודה האחרונות ונקבל נוסחת נסיגה

$\det(A_n) = -n^2 \det(A_{n-2})$

ולכן עבור n אי זוגי $\det(A_n)=0$ ועבור n זוגי $\det(A_n)=1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots n^2$

מלאה ב

עבור n זוגי, מטריצת המקדמים הפיכה, ולכן וקטור ה-0 הוא הפתרון היחיד.

עבור n איזוגי, מטריצת המקדמים לא הפיכה, ולכן וקטור ה-0 אינו הפתרון היחיד. נשים לב כי השורה הראשונה מחיבת כי $x_2=0$, וכי השורה האחרונה מחיבת כי $x_{n-1}=0$. השורות הראשונה והשלישית מחיבות כי גם $x_4=0$, השורות הראשונה והשלישית והחמישית מחיבות כי גם $x_6=0$ וכן הלאה. לכן צריך להתקים $x_2=x_4=..=x_{n-1}=0$.

נביט במשוואות השניה, הרביעית וכן הלאה. אז $x_1+2x_3=0,\ 3x_3+4x_5=0,\ \ldots\ (n-2)x_{n-2}+(n-1)x_n=0$. נבחר את $x_n=n!$ כפרמטר, אז $x_{n-2}=-(n-3)!(n-1)^2n$, $x_{n-4}=(n-5)!(n-3)^2(n-1)^2n$, ובסוף נקבל $x_1=(-1)^{n/2}1^2\,3^2\,5^2\ldots(n-5)^2(n-3)^2(n-1)^2n$

תשובה לשאלה 11

לא לדוגמא נביט במטריצה הבאה שהיא רבועית ואנטי סימטרית

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

אך הצמודה שלה היא .

$$\begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$$

היא סימטרית.

<u>תשובה לשאלה 12</u>

כן, כי $A(v-w)=Av-Aw=b-b=0$.

<u>תשובה לשאלה 13</u>

כן. נביט לדוגמא בפעולה המחליפה את השורות הראשונה והשניה במטריצה.