



מבחן אמצע באלגברה לינארית ב למדעי המחשב-הנדסאים-סמסטר קיץ.

יום ו,טו אלול התשס"ו 8-9-2006

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים.
- התשובות לכל השאלות יכתבו בטופס המבחן, המחברת משמשת לטיוטה בלבד. יש לכתוב תשובות סופיות בלבד (למעט שאלה 4).

בהצלחה.

שאלה 1 (28 מקודות):

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + 3y + bz = 1 \\ 4x + 3by + 5z = b \\ 6x + (3b + 6)y + 9z = 2b \end{cases}$$

א. מצא את ערכי b עבורם למערכת יש ∞ פתרונות. תשובה:

ב. מצא את ערכי b עבורם אין למערכת פתרונות. תשובה:

ג. מצא את ערכי b עבורם למערכת יש פתרון יחיד. תשובה:

ד. עבור כל אותם ערכי b שמצאת בסעיף א, כתוב את הפתרונות. תשובה:

שאלה 2 (21 מקודות):

נתונה המשוואה המטריציאלית:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 14 \\ 5 & 11 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{כאשר}$$

א. כתוב כאן שלב בינים בחשוב A^{-1} . (כאשר במטריצה 3×6 , יש שלשה אפסים מתחת האלכסון בחצי השמאלי). תשובה:

ב. כתוב כאן את A^{-1} . תשובה:

ג. מצא את כל המטריצות X אשר מקימות את השויון. תשובה:

שאלה 3 (35 מקודות):

נתון כי A היא מטריצה רבועית אשר מקימת את השויון $A^2 = -2A - 4I$.

א. בטא את A^3 כצרוף של A ושל I . תשובה:

ב. בטא את A^4 כצרוף של A ושל I . תשובה:

ג. בטא את A^5 כצרוף של A ושל I . תשובה:

ד. בטא את A^{33} כצרוף של A ושל I . תשובה:

ה. בטא את A^{43} כצרוף של A ושל I . תשובה:

שאלה 4 (16 מקודות):

נתונות מטריצות A, B, C מסדר $n \times n$. הוכח כי $A(B+C) = AB+AC$.

תשובה 1.

נביט על המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & b & 1 \\ 4 & 3b & 5 & b \\ 6 & 3b+6 & 9 & 2b \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{S_3-6S_1 \rightarrow S_3}]{S_2-4S_1 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & b & 1 \\ 0 & 3b-12 & 5-4b & b-4 \\ 0 & 3b-12 & 9-6b & 2b-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & b & 1 \\ 0 & 3b-12 & 5-4b & b-4 \\ 0 & 0 & 4-2b & b-2 \end{pmatrix}$$

אם b שונה מ-4 ומ-2, יש פתרון יחיד. נציב את הערכים המיוחדים. עבור $b=2$ נקבל:

ולכן
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2/(-6) \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-3S_2 \rightarrow S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $z=0$ משורה שניה, $z=-1/2$ משורה
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$
 : עבור $b=4$ נקבל: $x=-z/2, y=1/3-z/2$

שלישית, ואין למערכת פתרון.

תשובה 2

נחשב את A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 11 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_2-4S_1 \rightarrow S_2 \\ S_3-5S_1 \rightarrow S_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2 \rightarrow S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_1+3S_3 \rightarrow S_1 \\ S_2+2S_3 \rightarrow S_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} -S_3 \rightarrow S_3 \\ S_1-2S_2 \rightarrow S_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

כעת נפתר את X , ולכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 29 \\ -2 & -17 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ובדיקה מראה כי זהו הפתרון הנכון.

תשובה 3

$$A^2 = -2A - 4I, A^3 = -2A^2 - 4A = -2(-2A - 4I) - 4A = 4A + 8I - 4A = 8I$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot 8I = 8A, A^5 = A^2 \cdot A^3 = (-2A - 4I) \cdot 8I = -16A - 32I,$$

$$A^{33} = (A^3)^{11} = (8I)^{11} = (2^{33})I, A^{43} = (A^3)^{14} \cdot A = (8I)^{14} \cdot A = (2^{42})A.$$