NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

<u>מבחן אמצע באלגברה לינארית ב למדעי המחשב-הנדסאים-סמסטר קיץ.</u>

<u>יום ב,יג אלול התשס"ז 27-8-2007</u>

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים.

בהצלחה.

טל: Tel: (972-9) 8607777 פקס: Fax: (972-9) 8607711

שאלה 1 (28 נקודות):

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+(b-1)y+z=3b \\ x-y+(3-b)z=2 \\ 4x+by+2bz=20 \end{cases}$$

א. מצא את ערכי b עבורם למערכת יש ∞ פתרונות (יתכנו שברים-לא להבהל). תשובה:

ב. מצא את ערכי b עבורם אין למערכת פתרונות (יתכנו שברים-לא להבהל). תשובה:

ג. מצא את ערכי b עבורם למערכת יש פתרון יחיד (יתכנו שברים-לא להבהל). תשובה:

ד. עבור כל אותם ערכי b שמצאת בסעיף א, כתוב את הפתרונות. תשובה:

<u>שאלה 2 (21 נקודות):</u>

פתור את המשוואה המטריציאלית:

$$X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

<u>שאלה 3 (35 נקודות):</u>

נתונה מערכת המשוואות הלינארית $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}$ כאשר A היא בצורת מדרגות כלשהי,

וכאשר ב-A יודעים את העמודות הצדדיות אבל נמחקו שתי העמודות האמצעיות:

$A=\begin{pmatrix}1 & ? & ? & 0\\0 & ? & ? & 0\\0 & ? & ? & 1\end{pmatrix}$. ונתון כי ה-1 שמופיע בעמודות ראשונה ורביעית הוא 1 פותח (פיבוט).

נא להשלים את הערכים החסרים ב-A.

<u>שאלה 4 (16 נקודות):</u>

נתונות מטריצות A,C,B מסדר $n\text{x}n$. הוכח את חק הקבוץ עבור כפל מטריצות:

$A(BC)=(AB)C$.

תשובות

תשובות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & (b-1) & 1 & 3b \\ 1 & -1 & (3-b) & 2 \\ 4 & b & 2b & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & (b-1) & 1 & 3b \\ 0 & -b & (2-b) & 2-3b \\ 0 & 4-3b & 2b-4 & 20-12b \end{pmatrix} \xrightarrow{(4-3b)S_2+bS_3\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (b-1) & 1 & 3b \\ 0 & -b & (2-b) & 2-3b \\ 0 & 0 & K & L \end{pmatrix}, K=(4-3b)(2-b)+b(2b-4)=(b-2)[(3b-4)+2b]=(b-2)(5b-4),$$

$$L=(4-3b)(2-3b)+b(20-12b)=(9b^2-18b+8)+(20b-12b^2)=8+2b-3b^2=(2-b)(3b+4)$$

ולכן עבור b=0,2,0.8 יהיה מקרה מיוחד, ועבור כל מקרה אחר נקבל פתרון יחיד. נציב b=2 ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & (b-1) & 1 & 3b \\ 0 & -b & (2-b) & 2-3b \\ 0 & 4-3b & 2b-4 & 20-12b \end{pmatrix} \xrightarrow{b=2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

כלומר במקרה זה יש אינסוף פתרונות.

נציב b=0.8 ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & (b-1) & 1 & 3b \\ 0 & -b & (2-b) & 2-3b \\ 0 & 4-3b & 2b-4 & 20-12b \end{pmatrix} \xrightarrow{b=0.8} \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 1 & 2.4 \\ 0 & -0.8 & 1.2 & -0.4 \\ 0 & 1.6 & -2.4 & 10.4 \end{pmatrix}$$

כלומר במקרה זה אין פתרונות.

נציב b=0 ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & (b-1) & 1 & 3b \\ 0 & -b & (2-b) & 2-3b \\ 0 & 4-3b & 2b-4 & 20-12b \end{pmatrix} \xrightarrow{b=0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$$

כלומר במקרה זה יש פתרון יחיד.

קבלנו מקרה זה כחשוד כי בפעולה האחרונה כפלנו את השורה השניה ב-b לפני שהחזרנו אותה לעצמה.

כעת נפתור את המערכת עבור b=2. נמשיך מהמערכת בה הצבנו b=2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to y=2, x+z=4 \to x=4-z \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-z \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$X\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1&-3\\3&1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a+3b&2a+4b\\c+3d&2c+4d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\3a+4c&3b+4d\end{pmatrix}=$$

ולכן מקבלים ארבע

$$=\begin{pmatrix}3b-2c&2a+3b-2d\\3d-3a-3c&2c-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3\\3&1\end{pmatrix}$$

משוואות:

$$\begin{cases}3b-2c=-1\\2a+3b-2d=-3\\3d-3a-3c=3\\2c-3b=1\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}0&-3&2&0&1\\2&3&0&-2&-3\\-3&0&-3&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3/3\leftrightarrow S_1}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1&1&1\\2&3&0&-2&-3\\0&-3&2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2+2S_1\rightarrow S_2}\begin{pmatrix}-1&0&-1&1&1\\0&3&-2&0&-1\\0&-3&2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-S_1\rightarrow S_1]{S_2/3\rightarrow S_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-1\\0&1&-\tfrac{2}{3}&0&-\tfrac{1}{3}\\ &&&&\end{pmatrix}$$

$$a = d - c - 1, b = \frac{2c}{3} - \frac{1}{3},$$

ולכן פתרון כללי הוא

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-c-1 & \frac{2c}{3} - \frac{1}{3} \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 3.

$. \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$ נשים לב כי שני סימני השאלה בשורה השלישית חייבים להיות אפסים, כיון שהם משמאל ל-1 של צורת המדרגות, ולכן, נסמן באותיות את התכנים של שאר המקומות ונקבל:

$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ כמו כן ידוע כי c או d הם 1-ים של צורת המדרגות, ואם d=1 אז לפי צורת המדרגות חיב להתקים כי c=0. ונקבל מערכת קטנה יותר:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

נעבר על שתי האפשרויות. אם d=1 אז לפי צורת המדרגות חיב להיות c=0 ואז המשואה האחרונה הופכת להיות 3=5 סתירה.

אם c=1 אז מהמשואה האחרונה מקבלים 3d=3 כלומר d=1. אז לפי צורת המדרגות צריך להתקים a=0 ולכן 3b=3 כלומר b=1. לכן המערכת האפשרית היחידה בצורת מדרגות היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$