המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> מבחן באלגברה ליניארית ב, יום שני ד אדר התשע"ח 19.02.2018 סמסטר א', מועד א'. תשע"ח.
מורה: גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר משך המבחן: 3 שעות
אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

חלק א'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על שתי שאלות מהשאלות 1-3 ועל שאלה אחת מהשאלות 4-5. ניתן להשתמש באופן חופשי בכל טענה שהוכחה בהרצאה כל עוד היא מצוטטת במדויק.

1. 15 **נקודות.**
יהיו $U=\{A\in M_n(\mathbb{R}), \forall 1\le i\ne j\le n, A(i,j)=0\}$ ו-
$W=\{A\in M_n(\mathbb{R}), \forall 1\le i\le n, A(i,i)=0\}$
א. הוכח ש U,W הם תתי-מרחבים של $M_n(\mathbb{R})$.
ב. הוכח ש $M_n(\mathbb{R})$ הוא הסכום של U ו W.

2. 15 **נקודות.**
הוכח שכל קבוצה בת"ל במרחב נפרש סופית מוכלת בבסיס.

3. 15 נקודות.
הוכח שלכל מטריצה A שממדיה $m\times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$ ודרגתה r , קימות מטריצות B בעלת ממדים $m\times r$ ו C בעלת ממדים $r\times n$ כך שמתקיים $BC=A$

4. 20 נקודות.
הוכח כי ממד מרחב השורות שוה לממד מרחב העמודות של מטריצה כלשהי A.

5. 20 נקודות.
א. נסח את משפט 18 הנקודות.
ב. הוכח כי נקודות 7-18 שקולות לנקודות 1-6 במשפט.

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על 5 שאלות בלבד. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

6. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U\le \mathbf{R}^4$ ו $V\le \mathbf{R}^4$ כאשר
$U=Sp\{(1,-2,-3,4),(1,-1,1,-1)\}, V=Sp\{(2,-1,-4,3),(0,3,2,-5),(1,4,1,-6)\}$
. השלם את בסיס של $U\cap V$ לבסיס של $\mathbf{R}^4$.

7. נתונה מטריצה ממשית

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&a&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&b\end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים.
א. מצא את כל הערכים של a,b שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.
ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של מרחב העמודות $C(A)$.

8. $B=(\bar{b}_1,\bar{b}_2)$ ו $A=(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$ שני בסיסים של תת-מרחב דו-מימדי V ($V \le \mathbf{Z}_5^3$).

א. מצא את $\bar{a}_1,\bar{a}_2$ אם ידוע ש $_AT_B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ c & d\end{pmatrix}$, $\bar{a}_1=(-2,1,1), \bar{b}_1=(1,1,1)$ ו $\bar{a}_2=(1,x,y), \bar{b}_2=(2,z,w)$.

ב. האם קיים וקטור $\bar{v}\in\mathbf{Z}_5^3$ השונה מאפס כך ש- $[\bar{v}]_A=[\bar{v}]_B$? נמק.

9. נתונה העתקה ליניארית $L:\mathbf{R}_3[x]\to M_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה

$$L(p(x))=\begin{pmatrix}-p(1) & p(0)\\ -p(0) & p(1)\end{pmatrix}$$

.

א. חשב את המטריצה של L בבסיסים $B=(1,x,x^2,x^3)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ ו $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ של $M_2(\mathbf{R})$.

ב. מצא בסיסים של $Ker(L)$ ו $\mathrm{Im}(L)$.

10. מצא העתקה לינארית L מ- $\mathbf{R}_2[x]$ ל $\mathbf{R}^2$ שמטריצת $_A[L]_B$ בבסיסים $A=(\bar{a}_1=(1,1),\bar{a}_2=(1,-1))$; $B=(\bar{b}_1=x^2,\bar{b}_2=x^2+x,\bar{b}_3=x^2+x+1)$ שווה ל-

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&5\end{pmatrix}$$

11. נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&3&-2&3\\2&-4&0&-4\\-2&1&2&1\end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A.

בהצלחה !

תשובות

1. א. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של U ולכן $U \neq \phi$. יהיו
$K,L \in U, a,b \in \mathbb{R}$ ויהיו $1 \le i \ne j \le n$ אז לפי ההגדרה $K(i,j)=L(i,j)=0$
נובע כי $(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=a0+b0=0$ לכן U הוא תמ״ו.
ב. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של W ולכן $W \neq \phi$. יהיו
$K,L \in W, a,b \in \mathbb{R}$ ויהיו $1 \le i \le n$ אז לפי ההגדרה $K(i,i)=L(i,i)=0$ נובע כי
$(aK+bL)(i,i)=aK(i,i)+bL(i,i)=a0+b0=0$ לכן W הוא תמ״ו . לכל מטריצה
$A \in M_n(\mathbb{R})$ נגדיר מטריצה K שאיבריה שוים ל-0 על האלכסון ושוים לאיברי A
מחוץ לאלכסון, ומטריצה L שאיבריה שוים ל-0 מחוץ לאלכסון ושוים לאיברי
A על האלכסון A אז לפי ההגדרה $K \in W, L \in U$ ומתקיים ש לכל מטריצה A
מתקיים $A=K+L$ כלומר $M_n(\mathbb{R}) \subseteq U+W$ וההכלה השניה ברורה ולכן מתקיים
השויון הדרוש.

תשובה 6

. נעביר את U ואת V לצורה של משואות :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & -2 & b \\ 1 & -3 & c \\ -1 & 4 & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & a+b \\ 0 & -4 & c-a \\ 0 & 5 & a+d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & a+b \\ 0 & 0 & c-5a-4b \\ 0 & 0 & 6a+5b+d \end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת המרחב המקיים את המשואות $-5a-4b+c=0, 6a+5b+d=0$ ובצורה דומה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 4 & 3 & -1 & b \\ 1 & 2 & -4 & c \\ -6 & -5 & 3 & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 3 & -9 & b-4a \\ 0 & 2 & -6 & c-a \\ 0 & -5 & 15 & d+6a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -3 & b-3a-c \\ 0 & 2 & -6 & c-a \\ 0 & -5 & 15 & d+6a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -3 & b-3a-c \\ 0 & 0 & 0 & c-a-2(b-3a-c) \\ 0 & 0 & 0 & d+6a+5(b-3a-c) \end{pmatrix}$$

כלומר V הוא תת המרחב המקיים את המשואות .5a+3c-2b=0,-9ad+5b-5c+d=0
ולכן ונקבל את איברי החתוך :

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ -9 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ -15 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -3x \\ 4x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ולכן הקבוצות הפורשות עבור U ו W הן בת"ל ומהוות בסיסים ל U ול-W, בסיס של החתוך הוא (1,-2,-3,4) ואחוד הבסיסים הוא בסיס של $\mathbb{R}^4$.

תשובה 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a & 5 \\ 0 & -5 & -10 & 9-6a & -20 \\ 0 & -10 & -20 & 14-11a & b-55 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a & 5 \\ 0 & -5 & -10 & 9-6a & -20 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 & b-15 \end{pmatrix}$$ ולכן

הדרגה המינימלית היא כאשר a=4,b=15. עבור הערכים הללו בסיס של C(A) הוא {(1,6,11),(2,7,12)}.

תשובה 8

א. לפי הנתון.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ z \\ w \end{pmatrix} \to -2+c=-1, -4+d=-3 \to c=d=1,$$
$$1+x=3, 1+y=3, \to x=y=2, z=w=4$$

ב. נסמן $[\bar{v}]_A = [\bar{v}]_B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ אז

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} . p = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)(1-x)-2 = -1-2x+x^2 = (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$$

אז הע"ע של T הם $1\pm\sqrt{2}$, ולכן 1 איננו ע"ע של T, ולכן למשואה אין פתרון.

תשובה 9.

$$L(1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -A_1 + A_2 - A_3 + A_4, L(x) = L(x^2) = L(x^3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A_1 + A_4$$ ולכן

מטריצת ההעתקה בבסיסים הללו היא $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. לכן

$$\operatorname{Im}(L) = Sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Sp\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, x, y \in R\right\}$$ ו

$$Ker(L)=\{p=ax^3+bx^2+cx+d\,,\,p(1)=p(0)=a+b+c=d=0\},\,p=\{x(a+bx-(a+b)x^2),a,b\in R\}=$$
$$=Sp\{x(1-x^2),x^2(1-x)\}$$

תשובה 10

$$L(x^2)=(1,1),L(x^2+x)=2(1,1)+3(-1,1)=(-1,5),L(x^2)+L(x)=(1,1)+L(x)=(-1,5)\to L(x)=(-2,4),$$
$$L(x^2+x+1)=4(1,1)+5(-1,1)=(-1,9)$$
$$L(x^2+x+1)=L(x^2+x)+L(1)\to(-1,9)=(-1,5)+L(1)\to L(1)=(0,4),$$
$$L(ax^2+bc+c)=aL(x^2)+bL(x)+cL(1)=a(1,1)+b(-2,4)+c(0,4)=(a-2b,a+4b+4c)$$

תשובה 11

$$p=\det\begin{pmatrix}-x&1&1&1\\1&3-x&-2&3\\2&-4&-x&-4\\-2&1&2&1-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1-x&1-x&1-x&1-x\\1&3-x&-2&3\\2&-4&-x&-4\\-2&1&2&1-x\end{pmatrix}=(1-x)\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&3-x&-2&3\\2&-4&-x&-4\\-2&1&2&1-x\end{pmatrix}=$$
$$=(1-x)\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2-x&-3&2\\2&-6&-x-2&-6\\-2&3&4&3-x\end{pmatrix}=(1-x)\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-1-x&-1-x&-1-x\\2&-6&-x-2&-6\\-2&3&4&3-x\end{pmatrix}=$$
$$-(1-x)(1+x)\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\2&-6&-x-2&-6\\-2&3&4&3-x\end{pmatrix}=(x-1)(x+1)\det\begin{pmatrix}1&1&1\\-6&-x-2&-6\\3&4&3-x\end{pmatrix}=(x-1)(x+1)\det\begin{pmatrix}-x+4&0\\1&-x\end{pmatrix}=$$
$$=(x-1)(x+1)x(x-4)$$

לכן הע״ע העצמיים של A הם $\pm1,0,4$., נציב כל ע״ע במערכת ונמצא ו״ע הצמודים להם. עבור 1-, נקבל

$$\begin{pmatrix}-x&1&1&1\\1&3-x&-2&3\\2&-4&-x&-4\\-2&1&2&1-x\end{pmatrix}\lambda=-1\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&4&-2&3\\2&-4&1&-4\\-2&1&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&3&-3&2\\0&-6&-1&-6\\0&-3&3&-2\end{pmatrix}$$

פורש את

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&3&-3&2\\0&0&-7&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&-5&0\\0&3&-10&0\\0&0&-7&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&0&5&0\\0&3&-10&0\\0&0&-7&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-5z/6\\10z/3\\z\\-7z/2\end{pmatrix}=\frac{z}{6}\begin{pmatrix}-5\\10\\6\\-7\end{pmatrix}$$

המרחב הצמוד ועבור 1 נקבל

ועבור 4 נקבל
$$\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -x & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 1-x \end{pmatrix} \lambda = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3w \\ -2w \\ -2w \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ועבור 0 נקבל
$$\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -x & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 1-x \end{pmatrix} \lambda = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -4 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 & 13 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -16 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -5w \\ 4w \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ונביט ב
$$\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -x & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 1-x \end{pmatrix} \lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן המטריצה המלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & -5 & -1 \\ 6 & -2 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$