המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> מבחן באלגברה ליניארית ב, יום שני כב שבט התשע"ט 28.01.2019 סמסטר א', מועד א'.
מורה: גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר משך המבחן: 3 שעות
אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

חלק א'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על שתי שאלות מהשאלות 1-3 ועל שאלה אחת מהשאלות 4-5. <u>בתשובות 2,3,4,5 יש להוכיח בכתב, בנוסף לטענה המבוקשת עוד שתי טענות עזר.</u>
אי אפשר להסתמך בהוכחת טענה על טענה שנסמכת עליה. למשל אם אני מבקש להוכיח כי מטריצה היא הפיכה אם ורק אם עמודותיה מהוות בסיס של N^F, לא תנתנה נקודות לטעון ששתי הטענות הללו הן טענות שקולות לפי משפט 18 הנקודות.

1. 15 **נקודות.**
נניח כי n הוא מספר זוגי ויהיו
$U=\{A\in M_n(\mathbb{R}), \forall 1\le i,j\le n, A(i,j)=A(n+1-i,j)=A(i,n+1-j)\}$ ו-
$V=\{A\in M_n(\mathbb{R}), \forall 1\le i,j\le n, A(i,j)=-A(n+1-i,j)=A(i,n+1-j)\}$
א. הוכח ש U,V הם תתי-מרחבים של $M_n(\mathbb{R})$.
ב. האם $M_n(\mathbb{R})$ הוא הסכום של U ו V?

2. 15 **נקודות.**

נתונים מ"ו V מעל F ונתונות קבוצות סופיות T,S כך ש T⊆Sp(S) , ויש לT יותר

איברים מאשר ל S. אז T ת"ל.

3 . 15 נקודות.
נתון V מ"ו מעל F בעל שלשה בסיסים B,A ו- C. אז מתקיים השוויון
$$[M]_B^C[M]_A^B=[M]_A^C.$$

4. 20 נקודות.

נתונה מטריצה A, אז ממד מרחב השורות שלה שוה לממד מרחב העמודות שלה.

5. 20 נקודות.
א. נתונה מטריצה וערך עצמי שלה. אז הרבוי הגיאומטרי קטן או שוה לרבוי האלגברי וגדול או שוה ל 1.

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על 5 שאלות בלבד. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

6. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^4$ ו $V \le \mathbf{R}^4$ כאשר
$U = Sp\{(1,3,1,3),(1,-1,1,-1)\}, V = Sp\{(1,4,7,0),(2,-1,-4,3),(1,4,1,-6)\}$
. השלם את הבסיס של $U+V$ לבסיס של $\mathbf{R}^4$.

7. נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a & 4 \\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 11 & -12 & 13 & -14 & b \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים.
א. מצא את כל הערכים של a,b שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.
ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של מרחב העמודות $C(A)$ ושל מרחב השורות $S(A)$

.8 $B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ ו $A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ שני בסיסים של תת-מרחב דו-מימדי V ($V \le \mathbf{Z}_5^3$).
א. מצא את $\bar{a}_2, \bar{b}_2$ אם ידוע ש $_BT_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{pmatrix}$, ו $\bar{a}_1 = (2,1,1), \bar{b}_1 = (1,2,1)$
. $\bar{a}_2 = (2,x,y), \bar{b}_2 = (1,z,w)$
ב. האם קיים וקטור $\bar{v} \in \mathbf{Z}_5^3$ השונה מאפס כך ש- $2[\bar{v}]_A = [\bar{v}]_B$. נמק.

9. נתונה העתקה ליניארית $L: \mathbf{R}_3[x] \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה

$$L(p(x)) = \begin{pmatrix} -p(1) & p(0) \\ -p(0) & p(-1) \end{pmatrix}$$

א. חשב את המטריצה של L בבסיסים $B = (1, x, x^2, x^3)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ ו
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ של $M_2(\mathbf{R})$.
ב. מצא בסיסים של $Ker(L)$ ו $\mathrm{Im}(L)$.

10. מצא העתקה לינארית L מ-$\mathbf{R}_2[x]$ ל $\mathbf{R}^2$ שמטריצת $_A[L]_B$ בבסיסים
$A = (\bar{a}_1 = (1,1), \bar{a}_2 = (1,-1))$ $B = (\bar{b}_1 = x^2+1, \bar{b}_2 = x^2+x, \bar{b}_3 = x^2+x+1)$
שווה ל- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

11. נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}-9 & 7 & -7 & -7\\ -7 & 5 & -7 & -7\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 7 & -7 & 7 & 5\end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.
ב. מצא בסיסים של המרחבים העצמיים של A.
ג. מצא מטריצה המלכסנת T של A.

בהצלחה !

תשובות

תשובה 1

א1. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של U ולכן $U \neq \phi$. יהיו
$K,L \in U, a,b \in \mathbb{R}$ ויהיו $1 \le i,j \le n$ אז לפי ההגדרה
$K(i,j)=K(n+1-i,j), L(i,j)=L(n+1-i,j)$ ונובע כי
$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=aK(n+1-i,j)+bL(n+1-i,j)=(aK+bL)(n+1-i,j)$
בצורה דומה $K(i,j)=K(i,n+1-j), L(i,j)=L(i,n+1-j)$ ונובע כי
$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=aK(i,n+1-j)+bL(i,n+1-j)=(aK+bL)(i,n+1-j)$
ולכן באמת U הוא תמ"ו.

א2.ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של V ולכן $V \neq \phi$. יהיו
$K,L \in V, a,b \in \mathbb{R}$ ויהיו $1 \le i,j \le n$ אז לפי ההגדרה
$K(i,j)=-K(n+1-i,j), L(i,j)=-L(n+1-i,j)$ ונובע כי
$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=-aK(n+1-i,j)+-bL(n+1-i,j)=-(aK+bL)(n+1-i,j)$
בצורה דומה $K(i,j)=K(i,n+1-j), L(i,j)=L(i,n+1-j)$ ונובע כי
$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=aK(i,n+1-j)+bL(i,n+1-j)=(aK+bL)(i,n+1-j)$
ולכן באמת V הוא תמ"ו.

הממדים של U ושל V הם $(\frac{n}{2})^2=\frac{n^2}{4}$ ואלו הממד של $M_n(\mathbb{R})$ הוא n^2 ולכן אחוד
הבסיסים הללו לא יכול לפרוש את $M_n(\mathbb{R})$ ולכן הסכום איננו $M_n(\mathbb{R})$

תשובה 6

. נעביר את U ואת V לצורה של משוואות:
. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^4$ ו $V \le \mathbf{R}^4$ כאשר
$U=Sp\{(1,3,1,3),(1,-1,1,-1)\}, V=Sp\{(1,4,7,0),(2,-1,-4,3),(1,4,1,-6)\}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -1 & 3 & b\\ 1 & 1 & c\\ -1 & 3 & d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 4 & b+a\\ 0 & 0 & c-a\\ 0 & 4 & d+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 4 & b+a\\ 0 & 0 & c-a\\ 0 & 0 & d-b\end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת מרחב בעל ממד 2

המקיים את המשוואות $a=c, b=d$ ובצורה דומה

$$\begin{pmatrix}1&1&2&a\\4&4&-1&b\\7&1&-4&c\\0&-6&3&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a\\0&0&-9&b-4a\\0&-6&-18&c-7a\\0&-6&3&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a\\0&0&-9&b-4a\\0&-6&-18&c-7a\\0&0&21&d-c+7a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a\\0&0&-9&b-4a\\0&-6&-18&c-7a\\0&0&3&d-c-a+2b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&a\\0&0&0&3d-3c-7a+7b\\0&-6&-18&c-7a\\0&0&-3&d-c+6a-2(b-4a)\end{pmatrix}$$

כלומר V הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשואה $3d-3c-7a+7b=0$. ולכן ונקבל את משואות החתוך :

$3d-3c-7a+7b=0,\ a=c,\ b=d \to 10(b-a)=0 \to a=b=c=d$ כלומר ולכן

$$U\cap V=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ ו } V=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\\-6\end{pmatrix}\right\} \quad U=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ואחוד הבסיסים הוא בסיס של $U+V=\mathbb{R}^4$.

תשובה 7.

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&a&4\\-6&7&-8&9&-10\\11&-12&13&-14&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&a&4\\0&-5&10&9+6a&14\\0&10&-20&-14-11a&b-44\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&a&4\\0&-5&10&9+6a&14\\0&0&0&4+a&b-16\end{pmatrix} \text{ ולכן}$$

הדרגה המינימלית היא כאשר a=-4,b=16. עבור הערכים הללו בסיס של C(A) הוא {(1,-6,11),(2,-7,12)}. ושל S(A) {(1,-2,3,-4,4),(0,-5,10,-15,14)}

תשובה 8

א. לפי הנתון.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}2\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\z\\w\end{pmatrix}\to 2+2c=1,4+2d=1\to c=2,d=1,$$

$$1+2x=2,1+2y=1,\to x=3,y=z=0,w=2$$

ב. נסמן $[\bar{v}]_A=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$ אז

$$2\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}.p=\det\begin{pmatrix}1-x&2\\2&1-x\end{pmatrix}=(1-x)(1-x)-4=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

אז הע״ע של T הם $-1=4,3=-2$, ולכן 2 אינו ע״ע של T, ולמשואה אין פתרון.

תשובה 9.

$$L(1)=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}=-A_1+A_2-A_3+A_4,\ L(x^2)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=-A_1+A_4$$

ולכן מטריצת

$$L(x)=L(x^3)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-A_1-A_4$$

ההעתקה בבסיסים הללו היא $\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\1&0&0&0\\-1&0&0&0\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$. לכן

$$\mathrm{Im}(L)=Sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\-y&z\end{pmatrix},x,y,z\in R\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\1&0&0&0\\-1&0&0&0\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&-1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ו $Ker(L)=\{p=ax^3+bx^2+cx+d, a=c=b+d=0\}, p=bx^2-b=b(x^2-1), b\in R\}$

$=Sp\{x^2-1\}$

תשובה 10

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$L(1)=L(\overline{b_3})-L(\overline{b_2})=(2(1,1)-2(1,-1))-(1(1,1)-1(1,-1))=(0,2),$$

$$L(x)=L(\overline{b_3})-L(\overline{b_1})=(2(1,1)-2(1,-1))-(1,1)=(-1,3),$$

$$L(x^2)=L(\overline{b_1})+L(\overline{b_2})-L(\overline{b_3})=(1,1)+(1(1,1)-1(1,-1))-(2(1,1)-2(1,-1))$$

$$=(1,1)+(0,2)-(0,4)=(1,-1)$$

$$L(ax^2+bc+c)=aL(x^2)+bL(x)+cL(1)=a(1,-1)+b(-1,3)+c(0,2)=(a-b,-a+3b+2c)$$

תשובה 11

$$p=\det\begin{pmatrix}-9-x & 7 & -7 & -7\\ -7 & 5-x & -7 & -7\\ 0 & 0 & -2-x & 0\\ 7 & -7 & 7 & 5-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-2-x & 2+x & 0 & 0\\ -7 & 5-x & -7 & -7\\ 0 & 0 & -2-x & 0\\ 7 & -7 & 7 & 5-x\end{pmatrix}=(2+x)\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -7 & 5-x & -7 & -7\\ 0 & 0 & -2-x & 0\\ 7 & -7 & 7 & 5-x\end{pmatrix}=$$

$$=-(2+x)^2\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -7 & 5-x & -7 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 7 & -7 & 7 & 5-x\end{pmatrix}=-(2+x)^2\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ -7 & -2-x & -7 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 0 & 7 & 5-x\end{pmatrix}=$$

$$=(2+x)^3\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ -7 & 1 & -7 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 0 & 7 & 5-x\end{pmatrix}=(x+2)^3(x-5)$$

לכן הע"ע העצמיים של A הם $5,-2$., נציב כל ע"ע במערכת ונמצא ו"ע הצמודים להם. עבור 5, נקבל

$$\begin{pmatrix}-9-x & 7 & -7 & -7\\ -7 & 5-x & -7 & -7\\ 0 & 0 & -2-x & 0\\ 7 & -7 & 7 & 5-x\end{pmatrix}\lambda=5\rightarrow\begin{pmatrix}-14 & 7 & -7 & -7\\ -7 & 0 & -7 & -7\\ 0 & 0 & -7 & 0\\ 7 & -7 & 7 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-w\\ -w\\ 0\\ w\end{pmatrix}=-w\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

הצמוד ועבור -2 נקבל

$$\begin{pmatrix}-9-x & 7 & -7 & -7\\ -7 & 5-x & -7 & -7\\ 0 & 0 & -2-x & 0\\ 7 & -7 & 7 & 5-x\end{pmatrix}\lambda=-2\rightarrow\begin{pmatrix}-7 & 7 & -7 & -7\\ -7 & 7 & -7 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 7 & -7 & 7 & 7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן מטריצה

$$\rightarrow\begin{pmatrix}y-z-w\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

מלכסנת היא

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$