NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. אלגברה לינארית 2,

סמסטר ב',מועד א יום ד, כט סיון התשס"ח 2-7-2008

המורה: גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.

משך המבחן: 2.5 שעות

התשובות תכתבנה במחברת.

הציון הגדול ביותר האפשרי הוא 101 נקודות.

מותרים מחשבונים.

בהצלחה

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

חלק א. בחלק זה יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

1. לכסן את המטריצה הבאה: מצא את המטריצות P ו-P^{-1} הדרושות:

$$A=\begin{pmatrix}-6 & -20 & -26\\ 6 & 20 & 26\\ -3 & -10 & -13\end{pmatrix}$$

2. נתונה המטריצה הבאה A. מצא מטריצות הפיכות P ו-Q כך ש PAQ היא מטריצה שיש לה 1-ים על ראשית האלכסון הראשי ואפסים בכל מקום אחר.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 7 & 7 & 5\\ 6 & 11 & 5 & 11\end{pmatrix}$$

3. נתונים המרחבים הלינאריים המוגדרים על ידי

$U=Sp\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}\},V=Sp\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\},$. מצא בסיסים עבור $U+V, U\cap V$

4. A היא מטריצה 3x3 שאיבריה לא ידועים וממשיים. נגדיר העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$ על ידי כפל מטריצות $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, נגדיר העתקה לינארית $S:R^3\to R^3$ על ידי כפל מטריצות $S\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(A+I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, ונגדיר העתקה לינארית $K:R^3\to R^3$ על ידי כפל מטריצות $K\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. ידוע כי הוקטור $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ הוא בסיס של Ket(T) וכי הוקטור $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא בסיס של Ker(S), וכי הוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא בסיס של Ker(K). מצא את אברי A.

5. נתון כי

$$A=\left\{\begin{pmatrix}8\\5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}35\\21\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12\\6\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ כי } \quad B=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\z\end{pmatrix}\right\} \text{ וכי } \quad {}_BM_A=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&9&3\\3&13&5\end{pmatrix}$$

א. כתוב מערכת משוואות ש- y,x ו-z צריכים לקים.

ב. מצא את y,x- ו-z:

חלק ב: שאלה אחת בת משקל של 10 נקודות:

6. נתון הבסיס הבא של R^3 מעל R : $A=\left\{a_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$ מצא בסיס

אורתונורמלי

$B=\{b_1,b_2,b_3\}$ המקיים כי לכל i, $1\le i\le n$, $Sp\{a_1,...,a_i\}=Sp\{b_1,...,b_i\}$. מספיק למצוא

את הבסיס, אין צורך לבדוק את התכונות.

חלק ג: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "נכון" או "לא נכון". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות. יש לבחור 7 שאלות מתוך 9.

7.   נתונה מטריצה רבועית A מסדר 3 ונתון כי A צמודה למטריצה $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **.**

אז 1 הוא ערך עצמי של A.   נכון   לא נכון

8. נתונה מטריצה רבועית A מסדר 3 ונתון כי A צמודה למטריצה $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **.**

אז 0 הוא ערך עצמי של A.   נכון   לא נכון

9. אחוד של תתי מרחבים יכול להיות תת מרחב.   נכון   לא נכון

10. נתונה מטריצה A רבועית מסדר 3 ונניח כי נגדיר העתקה $R^3 \rightarrow R^3$ על ידי $f(v)=Av$. אז יתכן כי הker של f יכיל את כל הוקטורים מהצורה $(x,0,0)$, ותמונת f תכיל את כל הוקטורים מהצורה $(0,0,z)$. נכון לא נכון

11. נתונות שתי מטריצות רבועיות מסדר 4 B,A. נתון כי קימים שני בסיסים L,K כך שמטריצת המעבר ביניהן היא A, אבל לא קימים בסיסים שמטריצת המעבר ביניהן היא B. אז לא קימים בסיסים שמטריצת המעבר ביניהן היא AB. נכון לא נכון

12. מטריצה רבועית A נקראת נילפוטנטית אם קים n טבעי כך ש-A^n (A בחזקת n) היא מטריצת ה-0. נתונה כזו מטריצה ונניח כי b ערך עצמי שלה. אז b חיב להיות 0. נכון לא נכון

13. לכל העתקה לינארית $f:V \rightarrow V$ מתקיים כי $\ker(f)=\ker(f^2)$ כאשר רבוע משמעו הרכבה. נכון לא נכון

14. קיימת העתקה לינארית $f:V \rightarrow V$ שעבורה מתקיים כי $\ker(f)=\ker(f^2)$ כאשר רבוע משמעו הרכבה. נכון לא נכון

15. $Sp(A \cup B)$ הוא המרחב $Sp(A) \cup Sp(B)$ נכון לא נכון

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות. משקל כל הוכחה 15 נקודות.

16. הוכח את המשפט: נתונה העתקה לינארית f:V→W. אז

$$\dim(Ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$$

17. הוכח כי אם W,U תתי מרחב של V, אז

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

בהצלחה !

תשובות:

תשובה 1

נחשב את הפולינום האפייני:

$$p = \det\begin{pmatrix} -6-\lambda & -20 & -26 \\ 6 & 20-\lambda & 26 \\ -3 & -10 & -13-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+2S_3\to S_2]{S_1-2S_3\to S_1} p = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & -\lambda & -2\lambda \\ -3 & -10 & -13-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\lambda[S_2/\lambda]\to S_2]{\lambda[S_1/\lambda]\to S_1} \lambda^2(\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -10 & -13-\lambda \end{pmatrix}) \xrightarrow{S_3-3S_1-10S_2\to S_3}$$

$$\lambda^2(\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}) = \lambda^2(1-\lambda)$$

ולכן הע"ע הם λ=0,1. נציב אותם ונמצא את הו"ע המתאימים:

עבור $\lambda=0$ נקבל:

$\begin{pmatrix} -6 & -20 & -26 \\ 6 & 20 & 26 \\ -3 & -10 & -13 \end{pmatrix}$ **זוהי מטריצה בעלת דרגה 1, ולכן ממד מרחב הפתרון הוא 2, כאשר על הפתרונות לקיים 3x+10y+13z=0. נשים לב כי -(-1,-1,1) ו (-13,0,3) הם ו"ע אשר צמודים ל-0.**

עבור $\lambda=1$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} -7 & -20 & -26 \\ 6 & 19 & 26 \\ -3 & -10 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+2S_3\to S_2]{S_1+S_2\to S_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -10 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה בעלת דרגה 2, ולכן ממד מרחב הפתרון הוא 1. נשים לב כי (2,-2,1) הוא ו"ע אשר צמוד ל-1.

לכן:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -13 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -13 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[S_1+S_3\to S_3]{S_2-S_1\to S_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -13 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2+S_3\to S_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -13 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[S_2-2S_3\to S_2]{S_1+2S_3\to S_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -7 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[S_3-3S_2\to S_3]{S_1+7S_2\to S_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -6 & -19 & -26 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \to P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 19 & 26 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -10 & -13 \end{pmatrix}$$

ובאמת:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&19&26\\-1&-3&-4\\-3&-10&-13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&-20&-26\\6&20&26\\-3&-10&-13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-13&2\\-1&0&-2\\1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-3&-10&-13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-13&2\\-1&0&-2\\1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\4&7&7&5\\6&11&5&11\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-6S_1\to S_3]{S_2-4S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&11&-7\\0&-1&11&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1+2S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&21&-11\\0&-1&11&-7\end{pmatrix}$$

ולכן אם נגדיר $f:R^4\to R^3$ על ידי f(v)=Av אז בסיס ל-Ker(f) הוא {(-21,11,1,0),(11,-7,0,1)}

ובסיס של Im(f) הוא {(1,4,6),(2,7,11)}.

לכן הבסיס הרצוי של R^4 הוא A={(1,0,0,0),(0,1,0,0), (-21,11,1,0),(11,-7,0,1)} ושל R^3 הוא D={(1,4,6),(2,7,11),(1,0,0)}

נביט על מטריצת המעבר מהבסיס A לבסיס הסטנדרטי E={(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)}. אז

$${}_E[M]_A=\begin{pmatrix}1&0&-21&11\\0&1&11&-7\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$ **כמו כן** $${}_E[M]_D=\begin{pmatrix}1&2&1\\4&7&0\\6&11&0\end{pmatrix}$$ **ולכן נקבל את**

$${}_D[M]_E=({}_E[M]_D)^{-1}$$ **על ידי**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\4&7&0&0&1&0\\6&11&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[S_3-6S_1\to S_3]{S_2-4S_1\to S_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&-1&-4&-4&1&0\\0&-1&-6&-6&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&-1&-4&-4&1&0\\0&0&-2&-2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2-2S_3\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&-1&0&0&3&-2\\0&0&-2&-2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3/(-2)\to S_3]{S_2/(-1)\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&1&0&0&-3&2\\0&0&1&1&0.5&-0.5\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-2S_2-S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&5.5&-3.5\\0&1&0&0&-3&2\\0&0&1&1&0.5&-0.5\end{pmatrix}$$

כלומר

$${}_D[M]_E=\begin{pmatrix}0&5.5&-3.5\\0&-3&2\\1&0.5&-0.5\end{pmatrix}.$$ **ובאמת**

$${}_D[M]_E\,A\,{}_E[M]_A=\begin{pmatrix}0&5.5&-3.5\\0&-3&2\\1&0.5&-0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\4&7&7&5\\6&11&5&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-21&11\\0&1&11&-7\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&5.5&-3.5\\0&-3&2\\1&0.5&-0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\4&7&0&0\\6&11&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ **כדרוש.**

תשובה 3

נמצא את המשואה המאפינת כל תת מרחב.

$$U=Sp\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}\}\to\begin{pmatrix}1&2&x\\1&3&y\\-1&2&z\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&x\\0&1&y-x\\0&4&z+x\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-4S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&x\\0&1&y-x\\0&0&z+x-4(y-x)\end{pmatrix}\to z+5x=4y$$

$$V=Sp\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\}\to\begin{pmatrix}1&0&x\\1&1&y\\1&2&z\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y-x\\0&2&z-x\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y-x\\0&0&z-x-2(y-x)\end{pmatrix}\to z+x=2y$$

לכן בחתוך z=4y-5x=2y-x ולכן 2y=4x,y=2x,z=4x-x=3x ולכן וקטור בסיס של החתוך הוא (1,2,3).

בסיס של U יכול להיות {(1,1,-1),(1,2,3)}. בסיס של V יכול להבחר {(1,1,1),(1,2,3)}. אחודם הוא בסיס של $U+V=R^3$.

תשובה 4

לפי הנתון λ=1 הוא ע"ע של A עם ו"ע צמוד (0,0,1) ו λ=-1 הוא ע"ע של A עם ו"ע צמוד (0,1,1), ו- λ=0 הוא ע"ע של A עם ו"ע צמוד (1,1,1) . לכן מתקיים

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ נחשב את ההפכית, נעביר אגפים ונקבל:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

, וקל לראות כי A זו מקימת את ההנחות.

תשובה 5.

$\begin{pmatrix}8\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\x\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\1\\y\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\0\\z\end{pmatrix}$ כלומר שוה ל מטריצת המכפלה $\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. באותה צורה $\begin{pmatrix}35\\21\\4\end{pmatrix}$ הוא מטריצת המכפלה $\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\9\\13\end{pmatrix}$ ולכן סך הכל נקבל שויון של מכפלת מטריצות: $\begin{pmatrix}8&35&12\\5&21&6\\1&4&1\end{pmatrix}={}_B[M]_A*\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\x&y&z\end{pmatrix}$, ופתרונה הוא

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\x&y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&35&12\\5&21&6\\1&4&1\end{pmatrix}({}_B[M]_A)^{-1}=\begin{pmatrix}8&35&12\\5&21&6\\1&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-7&3\\-1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן x=1,y=z=0.

תשובה 6

$A=\left\{a_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$. אז

$\|a_1\|^2=4+4+1=9,\|a_1\|=3,b_1=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$. **כעת:**

ולכן $a_2-(a_2,b_1)b_1=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}-(\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix})\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}-\frac{9}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

כעת $.\|(-2,1,2)\|^2=4+1+4=9, b_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$

$$a_3-(a_3,b_1)b_1-(a_3,b_2)b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}-(\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix})\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}-(\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix})\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}-\frac{9}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{9}{9}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

ולכן $b_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$ $.\|(1,-2,2)\|^2=1+4+4=9,$ קל לבדוק כי המערכת החדשה היא הרצויה.

תשובה 7.

לא, המטריצה B צמודה למטריצה 2IB ולכן גם A צמודה אליה אבל אברי האלכסון של 2B לא מכילים את המספר 1.

תשובה 8

כן, כי ההעתקה הלינארית שA מגדירה כוללת Ker שאיננו אפס, וזהו תת מרחב הצמוד לערך העצמי 0.

תשובה 9.

כן אם עבור שני תתי מרחב U⊆W אז האחוד הוא W וזהו תת מרחב.

תשובה 10

לא, כי במקרה זה $dim(ker(f))=1, dim(Im(f))=1$ וזוהי סתירה למשפט כי $dim(Ker(f))+dim(Im(f))=3$.

תשובה 11.

כן, כי הנתון שקול לכך כי A הפיכה ו-B לא הפיכה והמסקנה היא ש-AB לא מטריצה הפיכה, ובאמת מכפלה של מטריצות שהאחת הפיכה והשניה לא-איננה הפיכה.

תשובה 12

כן, כי אם b ע"ע של A אז b^n הוא ע"ע של A^n והערכים העצמיים היחידים של A^n חייבים להיות 0.

תשובה 13

לא למשל $f(x,y,z)=(0,x,y)$ מתקיים $dim(ker(f))=1, dim(ker(f^2))=2$.

תשובה 14

כן למשל $f(x,y,z)=(x,y,0)$ מתקיים כי $f=f^2$ ולכן יש להן אותו גרעין.

תשובה 15

לא, למשל אם $A=(1,0,0),Sp(A)=\{(x,0,0)\},B=\{(0,1,0),Sp(B)=\{(0,y,0)\}$ והאחוד שלהן איננו תת מרחב בכלל וביחוד לא $Sp(A\cup B)=\{(x,y,0)\}$.