המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> מבחן באלגברה ליניארית ב, יום רביעי י איר התשע"ח 25.04.2018 סמסטר א', מועד ב'. תשע"ח.
מורה: גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר משך המבחן: 3 שעות
אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

חלק א'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על שתי שאלות מהשאלות 1-3 ועל שאלה אחת מהשאלות 4-5. ניתן להשתמש באופן חופשי בכל טענה שהוכחה בהרצאה כל עוד היא מצוטטת במדויק.

1. 15 **נקודות.**
נניח כי n הוא מספר זוגי ויהיו
$U=\{A\in M_n(\mathbb{R}), \forall 1\le i, j\le n, A(i,j)=A(n+1-i,j)\}$ ו-
$W=\{A\in M_n(\mathbb{R}), \forall 1\le i, j\le n, A(i,j)=-A(n+1-i,j)\}$
א. הוכח ש U,W הם תתי-מרחבים של $M_n(\mathbb{R})$.
ב. הוכח ש $M_n(\mathbb{R})$ הוא הסכום של U ו W.

2. 15 **נקודות.**

נתונים מ"ו V מעל F ושתי קבוצות A⊆V, B⊆V. התנאים הבאים שקולים:

א.Sp(A)=Sp(B). ב. (B⊆Sp(A)) ∧ (A⊆Sp(B)).

3. 15 נקודות.

נתונים מ"ו V מעל F ונתונה קבוצה T כך ש T⊆Sp(S) כך שהעצמה של T סופית וגדולה יותר מאשר העצמה של S. אז T ת"ל.

4. 20 נקודות.
נתונים ה"ל g: V→W כאשר V מ"ו מעל F בעל שני בסיסים B,A ו- W מ"ו מעל F בעל שני בסיסים D,C . אז מתקיים השויון

$$[M]_{CC}^{D}[g]_B[M]_A^B =_D [g]_A$$

5. 20 נקודות.
א. נסח את משפט 18 הנקודות.
ב. הוכח כי נקודות 7-18 שקולות לנקודות 1-6 במשפט.

עמותה רשומה 580242451
טל: (972-9) 8607777 **Tel:** **פקס:** (972-9) 8844439 **Fax:**

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על 5 שאלות בלבד. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

6. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^4$ ו $V \le \mathbf{R}^4$ כאשר
$U = Sp\{(1,3,1,3),(1,-1,1,-1)\}, V = Sp\{(1,4,7,0),(2,-1,-4,3),(1,4,1,-6)\}$
. השלם את הבסיס של $U \cap V$ לבסיס של $\mathbf{R}^4$.

7. נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a & 5 \\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 11 & -12 & 13 & -14 & b \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים.
א. מצא את כל הערכים של a,b שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.
ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של מרחב העמודות $C(A)$

8) $B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ ו $A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ שני בסיסים של תת-מרחב דו-מימדי V ($V \le \mathbf{Z}_5^3$).
א. מצא את $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ אם ידוע ש $_AT_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{pmatrix}$, ו $\overline{a}_1 = (3,1,1), \overline{b}_1 = (1,1,1)$
. $\overline{a_2} = (1,x,y), \overline{b_2} = (2,z,w)$
ב. האם קיים וקטור $\bar{v} \in \mathbf{Z}_5^3$ השונה מאפס כך ש- $[\bar{v}]_A = [\bar{v}]_B$? נמק.

9. נתונה העתקה ליניארית $L : \mathbf{R}_3[x] \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה

$$L(p(x)) = \begin{pmatrix} -p(-1) & p(0) \\ -p(0) & p(-1) \end{pmatrix}$$

א. חשב את המטריצה של L בבסיסים $B = (1, x, x^2, x^3)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ ו
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ של $M_2(\mathbf{R})$.
ב. מצא בסיסים של $Ker(L)$ ו $\mathrm{Im}(L)$.

10. מצא העתקה לינארית L מ-$\mathbf{R}_2[x]$ ל $\mathbf{R}^2$ שמטריצת $_A[L]_B$ בבסיסים
$B = (\overline{b_1} = x^2 + 1, \overline{b_2} = x^2 + x, \overline{b_3} = x^2 + x + 1)$ $A = (\overline{a_1} = (1,1), \overline{a_2} = (1,-1))$
שווה ל- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

11. נתונה מטריצה ממשית $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.
ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.
ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A.

בהצלחה!

תשובות

1. א. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של U ולכן $U \neq \phi$. יהיו $K,L \in U, a,b \in \mathbb{R}$ ויהיו $1 \leq i,j \leq n$ אז לפי ההגדרה $K(i,j)=K(n+1-i,j), L(i,j)=L(n+1-i,j)$ נובע כי

$$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=aK(n+1-i,j)+bL(n+1-i,j)=(aK+bL)(n+1-i,j)$$

לכן U הוא תמ"ו.

ב. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של W ולכן $W \neq \phi$. יהיו $K,L \in W, a,b \in \mathbb{R}$ ויהיו $1 \leq i,j \leq n$ אז לפי ההגדרה $K(i,j)=-K(n+1-i,j), L(i,j)=-L(n+1-i,j)$ נובע כי

$$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=-aK(n+1-i,j)-bL(n+1-i,j)=-(aK+bL)(n+1-i,j)$$

לכן W הוא תמ"ו.

לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ נגדיר מטריצה K על ידי לכל $1 \leq i,j \leq n$

$K(i,j)=\dfrac{A(i,j)+A(n+1-i,j)}{2}$, ומטריצה L על ידי לכל $1 \leq i,j \leq n$

$L(i,j)=\dfrac{A(i,j)-A(n+1-i,j)}{2}$, אז מתקיים לכל $1 \leq i,j \leq n$

$$K(n+1-i,j)=\frac{A(n+1-i,j)+A(n+1-[n+1-i],j)}{2}=\frac{A(n+1-i,j)+A(i,j)}{2}=K(i,j)$$

ולכן $K \in U$

$$L(n+1-i,j)=\frac{A(n+1-i,j)-A(n+1-[n+1-i],j)}{2}=\frac{A(n+1-i,j)-A(i,j)}{2}=-L(i,j)$$

ולכן $L \in W$ ומתקיים לכל $1 \leq i,j \leq n$

$A(i,j)=\dfrac{A(i,j)+A(n+1-i,j)}{2}+\dfrac{A(i,j)-A(n+1-i,j)}{2}$ כלומר A היא סכום של שתי מטריצות האחת מ U והאחרת מ W ולכן $M_n(\mathbb{R}) \subseteq U+W$ וההכלה השניה ברורה ולכן מתקיים השויון הדרוש.

דרך אחר על ידי חשבון הממדים נובע כי הממדים גם של U וגם של W הם $\frac{n}{2}m$

ולכן לפי משפט ההכלה וההדחה

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)\rightarrow \dim(U+W)=\frac{n}{2}m+\frac{n}{2}m-\dim(U\cap W)=$$
$$=nm-\dim(U\cap W)=\dim(M_n(\mathbb{R}))-\dim(U\cap W)$$

ולכן אם נוכיח כי $U\cap W=\{0\}$ אז ינבע כי $U+W$ הוא תמ"ו של $M_n(\mathbb{R})$ בעל אותו ממד ולכן שוה לו ממש.

ואכן אם $A\in U\cap W$ נובע כי לכל $1\le i,j\le n$
$A(i,j)=A(n+1-i,j), A(i,j)=-A(n+1-i,j)\rightarrow A(i,j)=0$, כדרוש.

תשובה 6

. נעביר את U ואת V לצורה של משואות:

$$\begin{pmatrix}1&1&a\\-1&3&b\\1&1&c\\-1&3&d\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&a+b\\0&0&c-a\\0&2&a+d\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&a+b\\0&0&c-a\\0&0&d-b\end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת המרחב המקיים את המשואות $c-a=d-b=0$ ובצורה דומה

$$\begin{pmatrix}1&1&2&a\\4&4&-1&b\\7&1&-4&c\\0&-6&3&d\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&0&-9&b-4a\\0&-6&-18&c-7a\\0&-6&3&d\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&6&18&7a-c\\0&0&-9&b-4a\\0&0&21&d-c+7a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&6&18&7a-c\\0&0&9&4a-b\\0&0&0&3(d-c+7a)+7(b-4a)\end{pmatrix}$$

כלומר V הוא תת המרחב המקיים את המשואה 3d-3c+7b-7a=0. ולכן ונקבל את משואת החתוך: 3d-3c+7b-7a=3d-3c+7d-7c=10(d-c)=0. כלומר בחתוך c=d=a=b.

ולכן נקבל קבוצות פורשות ובת"ל $U\cap W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ו $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$

$$W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\\-6\end{pmatrix}\right\}$$

ואחוד הבסיסים הוא בסיס של $\mathbb{R}^4$.

תשובה 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a & 5 \\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 11 & -12 & 13 & -14 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 9+6a & 20 \\ 0 & 10 & -20 & -14-11a & b-55 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 9+6a & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 4+a & b-15 \end{pmatrix}$$ ולכן

הדרגה המינימלית היא כאשר a=-4,b=15. עבור הערכים הללו בסיס של C(A) הוא {(1,-6,11),(2,-7,12)}.

תשובה 8

א. לפי הנתון.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ z \\ w \end{pmatrix} \to 3+c=1, 6+d=2 \to c=-2, d=-4,$$

$$1-2x=1, 1-2y=1, \to x=y=0, z=w=2$$

ב. נסמן $[\bar{v}]_A = [\bar{v}]_B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ אז

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. p = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ -2 & -4-x \end{pmatrix} = (1-x)(-4-x)+4 = 3x+x^2 = x(x+3)$$

אז הע״ע של T הם $0,-3$, ולכן 1 אינו ע״ע של T, ולמשואה אין פתרון.

תשובה 9.

$$L(1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -A_1 + A_2 - A_3 + A_4, L(x^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A_1 + A_4$$

$$L(x) = L(x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_1 - A_4$$

ולכן מטריצת

ההעתקה בבסיסים הללו היא $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. לכן

$$\operatorname{Im}(L) = Sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Sp\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, x, y \in R\right\}$$ ו

$Ker(L) = \{p = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ p(-1) = p(0) = -a + b - c = d = 0\},\ p = \{x(ax^2 + c + (a+c)x), a, c \in R\}$
$== Sp\{x(1+x), x^2(x+1)\}$

תשובה 10

$$L(1) = L(\overline{b_3}) - L(\overline{b_2}) = (4(1,1) + 5(1,-1)) - (2(1,1) + 3(1,-1)) = (4,0),$$
$$L(x) = L(\overline{b_3}) - L(\overline{b_1}) = (4(1,1) + 5(1,-1)) - (1,1) = (8,-2),$$
$$L(x^2) = L(\overline{b_1}) + L(\overline{b_2}) - L(\overline{b_3}) = (1,1) + (2(1,1) + 3(1,-1)) - (4(1,1) + 5(1,-1))$$
$$= -(1,1) - 2(1,-1) = (-3,1)$$
$$L(ax^2 + bc + c) = aL(x^2) + bL(x) + cL(1) = a(-3,1) + b(8,-2) + c(4,0) = (8b + 4c - 3a, a - 2b)$$

תשובה 11

$$p = \det\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -x & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2-x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1-x & 1-x & 1-x \\ 1 & 2-x & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -x & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2-x \end{pmatrix} = (1-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -x & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2-x \end{pmatrix} =$$
$$= (1-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -x-2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} = (1-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & -1-x & -1-x \\ 2 & -2 & -x-2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} =$$
$$-(1-x)(1+x)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -x-2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} = (x-1)(x+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -x-2 & -3 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} = (x-1)(x+1)\det\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} =$$
$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

לכן הע״ע העצמיים של A הם $\pm 1, \pm i$,., נציב כל ע״ע במערכת ונמצא ו״ע הצמודים להם. עבור 1-, נקבל

פורש את המרחב

$$\begin{pmatrix}-x&1&1&1\\1&2-x&1&3\\2&0&-x&-1\\-2&-2&-1&-2-x\end{pmatrix}\lambda=-1\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&3\\2&0&1&-1\\-2&-2&-1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&2\\0&-2&-1&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&2\\0&0&-1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}w\\-w\\-w\\w\end{pmatrix}=w\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

הצמוד ועבור 1 נקבל

$$\begin{pmatrix}-x&1&1&1\\1&2-x&1&3\\2&0&-x&-1\\-2&-2&-1&-2-x\end{pmatrix}\lambda=1\rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&1&1&3\\2&0&-1&-1\\-2&-2&-1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&2&2&4\\0&2&1&1\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&1&1&2\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-w\\w\\-3w\\w\end{pmatrix}=w\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

ועבור i נקבל

$$\begin{pmatrix}-x&1&1&1\\1&2-x&1&3\\2&0&-x&-1\\-2&-2&-1&-2-x\end{pmatrix}\lambda=i\rightarrow\begin{pmatrix}-i&1&1&1\\1&2-i&1&3\\2&0&-i&-1\\-2&-2&-1&-2-i\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&i&i\\1&2-i&1&3\\2&0&-i&-1\\-2&-2&-1&-2-i\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&i&i\\1&2-i&1&3\\2&0&-i&-1\\-2&-2&-1&-2-i\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&i&i\\0&2-2i&1-i&3-i\\0&-2i&-3i&-1-2i\\0&-2&-1-i&-3-i\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&i&i\\0&2&3&2-i\\0&0&-1-2i&-2+i\\0&0&i&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&i&i\\0&2&3&2-i\\0&0&1&-i\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&0&i-1\\0&2&0&2+2i\\0&0&1&-i\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&0&i-1\\0&1&0&1+i\\0&0&1&-i\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1+i\\0&0&1&-i\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-(1+i)w\\iw\\w\end{pmatrix}=w\begin{pmatrix}0\\-(1+i)\\i\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-x&1&1&1\\1&2-x&1&3\\2&0&-x&-1\\-2&-2&-1&-2-x\end{pmatrix}\lambda=-i\rightarrow\begin{pmatrix}i&1&1&1\\1&2+i&1&3\\2&0&i&-1\\-2&-2&-1&-2+i\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-i&-i&-i\\1&2+i&1&3\\2&0&i&-1\\-2&-2&-1&-2+i\end{pmatrix}$$

ועבור i- נקבל

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-i&-i&-i\\0&2+2i&1+i&3+i\\0&2i&3i&-1+2i\\0&-2&-1+i&-3+i\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&i&i\\0&2&1-i&3-i\\0&0&-1+2i&-2-i\\0&0&-i&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&i&i\\0&2&1-i&3-i\\0&0&-i&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&i&0&1+i\\0&2&0&2-2i\\0&0&-i&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1-i\\0&0&-i&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\-(1-i)w\\iw\\w\end{pmatrix}=w\begin{pmatrix}0\\-(1-i)\\i\\1\end{pmatrix}$$

ולכן המטריצה המלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -(1+i) & -(1-i) \\ -1 & -3 & i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$