NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

<u>מבחן אמצע באלגברה לינארית ב למדעי המחשב-הנדסאים</u>

<u>יום ד, ג טבת התשס"ח 12-12-2007</u>

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה במחברת.

בהצלחה.

<u>שאלה 1(51 מקודות):</u>

עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, בדק במחברתך האם W הוא תת מרחב של V.

א. $F = R, V = R[x], W = \{p \mid [p(0)]^2 + [p'(0)]^2 = 0\}$

תזכורת : R[x] הוא אסף הפולינומים עם מקדמים ממשיים.

ב. $F = Z_5, V = M_{4,4}(Z_5), W = \{A \in V, A_{1,1} + A_{2,2} = 0\}$

תזכורת: $M_{4,4}$ הוא אסף המטריצות 4x4, $A_{i,j}$ הוא הרכיב ה-(i,j)-י של A.

ג. $F = R, V = R^3, W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, xyz = 0\}$

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

<u>שאלה 2 (32 נקודות)</u>

עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, ענה על השאלות הבאות בקשר למציאת בסיסים.

א. נתונים האיברים הבאים ב-$M_{2,2}$:

$$F = R, V = M_{2,2}(R), A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

מצא בסיסים ל: .$Sp\{A,B\}, Sp\{C,D\}, Sp\{A,B\} \cap Sp\{C,D\}, Sp\{A,B\}+Sp\{C,D\}$

ב. נביט על .$F = R, V = C^2, W = \{\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, iw = -\bar{z}\}$ כאשר הגג מסמן צמוד מרכב. מצא ל-W בסיס.

<u>שאלה 3 (17 נקודות)</u>

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$. הצג אותה כמכפלה A=PQ , כאשר השורות של Q הן בסיס למרחב השורות של A.

בהצלחה.

תשובות לשאלות

תשובה לשאלה 1

1-א $F=R,V=R[x],W=\{p\,|\,[p(0)]^2+[p'(0)]^2=0\}$ גורר כי p(0)=p'(0)=0. אם p,q שני פולינומים כאלה, אז גם p+q, כזה, ובנוסף לכל α, αp גם הוא כזה ולכן זהו תת מרחב.

1-ב זהו תת מרחב, שכן $F=Z_5,V=M_{4,4}(Z_5),W=\{A\in V,A_{1,1}+A_{2,2}=0\}$ גורר כי שני רכיבים במטריצה מקימים את השויון. אז עבור כל שתי מטריצות A,B בתת המרחב מתקים:
$(A+B)_{1,1}+(A+B)_{2,2}=A_{1,1}+A_{2,2}+B_{1,1}+B_{2,2}=0+0=0$ ולכל מטריצה בתת המרחב וסקלר מתקים:
$(\alpha A)_{1,1}+(\alpha A)_{2,2}=\alpha(A_{1,1}+A_{2,2})=\alpha 0=0$

1-ג זהו אינו תת מרחב. נביט בתנאי $F=R,V=R^3,W=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},xyz=0\}$. נובע כי $(0,1,1)$ בתת הקבוצה, וגם $(1,0,1)$ בתת הקבוצה, אך סכומם אינו שם. אגב, תת הקבוצה סגורה להומוגניות . הקבוצה לא ריקה כי היא כוללת את וקטור ה-0 וברור כי היא סגורה לחבור וכפל בסקלר.

תשובה לשאלה 2

2-א-1,2,3 המטריצה אותה יש לדרג היא $\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 3 & z \\ 4 & 2 & w \end{pmatrix}$. נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 3 & z \\ 4 & 2 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-4S_1\to S_4]{S_2-2S_1\to S_2,S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & -7 & y-2x \\ 0 & -9 & z-3x \\ 0 & -14 & w-4x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_4-2S_2\to S_4]{7S_3-9S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & 0 & 7(z-3x)-9(y-2x) \\ 0 & 0 & (w-4x)-2(y-2x) \end{pmatrix}$$

לכן $Sp\{A,B\}$ מתאפין על ידי המשוואות 7z-3x-9y=0,w-2y=0 : קל לראות כי הוקטורים A,B מקימים משוואות אלו. בצורה דומה נקבל:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & x \\ 4 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \\ 1 & 4 & w \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & w \\ 2 & 1 & z \\ 3 & 2 & x \\ 4 & 3 & y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_4-4S_1\to S_4]{S_2-2S_1\to S_2,S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & z \\ 0 & -7 & z-2w \\ 0 & -10 & x-3w \\ 0 & -13 & y-4w \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[7S_4-13S_2\to S_4]{7S_3-10S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & z \\ 0 & -7 & z-2w \\ 0 & 0 & 7(x-3w)-10(z-2w) \\ 0 & 0 & 7(y-4w)-13(z-2w) \end{pmatrix}$$

לכן $Sp\{C,D\}$ מתאפין על ידי המשוואות $7x-w-10z=0,7y-2w-13z=0$: קל לראות כי הוקטורים C,D מקימים משוואות אלו

כך נקבל את המשוואות המאפינות את $Sp\{A,B\}\cap Sp\{C,D\}$ ואת פתרונן:

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 7 & -13 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+2S_1 \to S_1} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 7 & -13 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3-7S_1 \to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 126 & -38 & 6 \\ 0 & 7 & -13 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+3S_2 \to S_2]{S_3+63S_2 \to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & -38 & 69 \\ 0 & 7 & -13 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4-7S_2 \to S_4} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & -38 & 69 \\ 0 & 0 & 78 & -9 \end{pmatrix}$$

קל לראות כי המטריצה האחרונה היא בעלת דטרמיננט שונה מ-0, ולכן בעלת דרגה 4, כלומר מרחב החתוך הוא מרחב ה-0. לכן הסכום הוא כל R^4, ופשוט $\{A,B\}$ בסיס למרחב הנפרש על ידם, $\{C,D\}$ בסיס למרחב הנפרש על ידם, ואחודם הוא בסיס של הסכום.

2-ב

נסמן $z=x+iy,w=a+ib$. אז נובע כי הצמוד של z הוא x-iy וכי $iw=-b+ia$, ולכן השויון גורר כי $x=-b,y=-a$.
לכן b,a תלויים ב-x,y ולכן: ב-C^2 מתקים

ובתת המרחב מתקים: $$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy \\ a+ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy \\ a+ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -0 \end{pmatrix}$$

תשובה לשאלה 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-4S_1\to S_4]{S_2-2S_1\to S_2, S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix}$ ורואים כי דרגת המטריצה היא 2. כמו

כן רואים כי

$$\begin{array}{l} S_3-3S_1=2(S_2-2S_1), S_4-4S_1=3(S_2-2S_1) \to \\ S_3+S_1=2S_2, S_4+2S_1=3S_2 \to S_3=2S_2-S_1, S_4=3S_2-2S_1 \end{array}$$ ולכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$