המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס לינארית ב כתת ערב –סמסטר סתו התשע"ה מועד א

יום א, י אדר ה'תשע"ה 1-3-2015

- **המורה: גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.**
- **משך המבחן: 3 וחצי שעות**
- **התשובות תכתבנה במחברת למעט התשובות לשאלות 6-10 שתענינה בשאלון.**
- **הציון המירבי האפשרי הוא 100 נקודות.**
- **מותרים מחשבונים שאינם מדעיים.**

בהצלחה

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

חלק א. בחלק זה יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. משקל של כל שאלה: 15 נקודות

יש לנמק כל תשובה בפרוטרוט.

1. נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$ $A=\begin{pmatrix} 11 & -10 & -10 \\ -22 & 23 & 22 \\ 34 & -34 & -33 \end{pmatrix}$.

א. לכסן את המטריצה A.

ב. חשב את A^{2015}.

2. 2. נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 16 & 3 \end{pmatrix}$.

מצא מטריצה B שקולה ל A כך שעל חלק מהאלכסון הראשי של B נמצאים הערכים 2 ובכל מקום אחר נמצאים אפסים. פרט את השלבים.

3. נתונים המרחבים הלינאריים מעל $\mathbb{R}$, המוגדרים על ידי

$U=Sp\{\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\5\\0\\0\end{pmatrix}\},V=Sp\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}\}$. מצא בסיסים עבור $U+V, U\cap V$.

4. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{Z}_7$

א. לכסן את המטריצה A.

ב. חשב את A^7.

ג. חשב את A^{2016}.

5. יהי $\mathbf{R}_n[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה $\le n$. נגדיר

$U=\{f(x)\in\mathbf{R}_n[x] \mid f(-x)=f(x)\}, W=\{f(x)\in\mathbf{R}_n[x] \mid f(-x)=-f(x)\},$

א. הוכח ש U,W תת-מרחבים של $\mathbf{R}_n[x]$.

ב. הוכח ש $\mathbf{R}_n[x]$ הוא סכום של U ו W (ז"א $U+W=\mathbf{R}_n[x]$).

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון" ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את התשובה יש לכתוב <u>בשאלון</u>.

משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-5 נקודות. יש לבחור 4 שאלות מתוך 5.

6. תזכורת: מטריצות רבועיות A,B נקראות דומות אם יש מטריצה הפיכה P כך ש $B=PAP^{-1}$. נתונות מטריצות A, B אשר דומות זו לזו ומטריצות D,C אשר דומות זו לזו. אז המטריצות A+C,B+D הן דומות זו לזו.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

7. תזכורת: מטריצות A,B נקראות שקולות אם יש מטריצות הפיכות P,Q כך ש $B=PAQ$. נתונות מטריצות A, B אשר שקולות זו לזו ומטריצות D,C אשר שקולות זו לזו. אז המטריצות A+C,B+D הן שקולות זו לזו.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

8. נתונות שתי מטריצות רבועיות בעלות אותו אורך (ממד) n שתסומנה A וB, ונתון שיש להן אותו פולינום אפיני p, וכי לפולינום הזה יש n שרשים שונים. אז הן חיבות להיות דומות.

נכון לא נכון

נמוק קצר.

9. נתונות שתי קבוצות ב"תל B,A. אז יתכן כי $A\cup B$ תהיה ת"ל.

נכון לא נכון

נמוק קצר.

10. נתונות קבוצות סופיות A,B . אז $Sp(AUB)=Sp(A)+Sp(B)$.

נכון לא נכון

נמוק קצר.

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות. משקל כל הוכחה 10 נקודות. אם אתה משתמש בטענת עזר עליך לנסח אותה בנפרד מההוכחה.

11. . נתונים העתקה לינארית $f:V\to W$, A,B בסיסים של V, D,C בסיסים של W.

הוכח כי $[f]_A^D=[R]_C^D[f]_B^C[R]_A^B$. כאשר [f] היא מטריצת ההעתקה בבסיסים הנתונים ו [R] היא מטריצת המעבר מבסיס לבסיס.

12. מטריצה A היא לכסינה אם ורק אם לכל ערך עצמי שלה הרבוי האלגברי והגיאומטרי שווים.

בהצלחה !

תשובות

תשובה ראשונה, **א**

$$A=\begin{pmatrix}11&-10&-10\\-22&23&22\\34&-34&-33\end{pmatrix},-p=\det\begin{pmatrix}11-\lambda&-10&-10\\-22&23-\lambda&22\\34&-34&-33-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{-S_1+S_2+S_3\to S_3}\det\begin{pmatrix}11-\lambda&-10&-10\\-22&23-\lambda&22\\\lambda+1&-\lambda-1&-\lambda-1\end{pmatrix}=$$

$$(\lambda+1)\det\begin{pmatrix}11-\lambda&-10&-10\\-22&23-\lambda&22\\1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{2S_1+S_2+2S_3\to S_2}(\lambda+1)\det\begin{pmatrix}11-\lambda&-10&-10\\2-2\lambda&1-\lambda&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda+1)(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}11-\lambda&-10&-10\\2&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-10S_3\to S_1}(\lambda+1)(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\2&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}=(\lambda+1)(1-\lambda)^2\det\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}=$$

$$=-(\lambda+1)(1-\lambda)^2\to p=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

נמצא וקטורים עצמיים. עבור -1

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}11-\lambda&-10&-10\\-22&23-\lambda&22\\34&-34&-33-\lambda\end{pmatrix}\to A+I=\begin{pmatrix}12&-10&-10\\-22&24&22\\34&-34&-32\end{pmatrix}\xrightarrow{-S_1+S_2+S_3\to S_3}\begin{pmatrix}12&-10&-10\\-22&24&22\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2S_1+S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}12&-10&-10\\2&4&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2/2\to S_2]{S_1+5S_2\to S_1}\begin{pmatrix}22&10&0\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[S_1/2\to S_1]{5S_2-S_1\to S_2}\begin{pmatrix}11&5&0\\-17&0&5\\0&0&0\end{pmatrix}\to v=\begin{pmatrix}5\\-11\\17\end{pmatrix}$$

ועבור 1

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}11-\lambda & -10 & -10\\ -22 & 23-\lambda & 22\\ 34 & -34 & -33-\lambda\end{pmatrix}, A-I=\begin{pmatrix}10 & -10 & -10\\ -22 & 22 & 22\\ 34 & -34 & -34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}\to v=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

ואכן עבור $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & 17\end{pmatrix}$ נקבל

$$\left(\begin{matrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & 17\end{matrix}\ I_3\right)\xrightarrow[S_3\leftrightarrow S_2]{S_1\leftrightarrow S_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -11 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 17 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-S_1-S_2\to S_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -11 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 17 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_1-11S_3\to S_1]{S_2+17S_3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -11 & 12 & 11\\ 0 & 1 & 0 & 17 & -17 & -16\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{-S_3\to S_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -11 & 12 & 11\\ 0 & 1 & 0 & 17 & -17 & -16\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

ואכן נקבל $\begin{pmatrix}-11 & 12 & 11\\ 17 & -17 & -16\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ונקבל כדרוש

$$\begin{pmatrix}-11 & 12 & 11\\ 17 & -17 & -16\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & -10 & -10\\ -22 & 23 & 22\\ 34 & -34 & -33\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12 & 11\\ 17 & -17 & -16\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & 17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\Lambda$$

סעיף ב. כיון ש $\Lambda^{2015}=\Lambda$ נובע כי $A^{2015}=A$

תשובה 2

א. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 6 & 1\\ 5 & 8 & 16 & 3\end{pmatrix}$. נגדיר $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ על ידי $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+5z+w\\ 3x+4y+6z+w\\ 5x+8y+16z+3w\end{pmatrix}$. אז

ברור כי $[f]_{E(4)}^{E(3)}=A$

ב,ג. נפתור את המערכת, אז

$$\begin{pmatrix}1&2&5&1\\3&4&6&1\\5&8&16&3\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&5&1\\0&-2&-9&-2\\0&-2&-9&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1+S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-4&-1\\0&-2&-9&-2\end{pmatrix}\to$$

$$x=4z+w,\, y=-w-4.5z,\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\frac{z}{2}\begin{pmatrix}8\\-9\\2\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\-9\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$C=\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},[f]_B^C=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},[R]_B^{E(4)}=\begin{pmatrix}1&0&8&1\\0&1&-9&-1\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$[R]_{E(3)}^C=?,\begin{pmatrix}0.5&1&1&1&0&0\\1.5&2&0&0&1&0\\2.5&4&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}0.5&1&1&1&0&0\\0&-1&-3&-3&1&0\\0&-1&-5&-5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1+S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix}0.5&0&-2&-2&1&0\\0&-1&-3&-3&1&0\\0&0&-2&-2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3/-2\to S_3,S_2/-1\to S_2,]{S_1-S_3\to S_1}\begin{pmatrix}0.5&0&0&0&2&-1\\0&1&3&3&-1&0\\0&0&1&1&0.5&-0.5\end{pmatrix}\xrightarrow[2S_1\to S_2]{S_2-3S_3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&4&-2\\0&1&0&0&-2.5&1.5\\0&0&1&1&0.5&-0.5\end{pmatrix}$$

ונבדוק

$$\begin{pmatrix}0&4&-2\\0&-2.5&1.5\\1&0.5&-0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5&1&1\\1.5&2&0\\2.5&4&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&8&-4\\0&-5&3\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&0\\5&8&0\end{pmatrix}=I$$

כדרוש. ונבדוק

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&8&-4\\0&-5&3\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&5&1\\3&4&6&1\\5&8&16&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&8&1\\0&1&-9&-1\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&0&-16&-4\\0&4&18&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&8&1\\0&1&-9&-1\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כדרוש.

תשובה 3

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & a \\ 3 & 5 & b \\ 2 & 0 & c \\ 1 & 0 & d \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_4\to S_3]{S_1-4S_4\to S_1, S_2-3S_4\to S_2} \begin{pmatrix} 0 & 5 & a-4d \\ 0 & 5 & b-3d \\ 0 & 0 & c-2d \\ 1 & 0 & d \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-d-b \\ 0 & 5 & b-3d \\ 0 & 0 & c-2d \\ 1 & 0 & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & b \\ 3 & 1 & c \\ 4 & 3 & d \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2-2S_1\to S_2]{S_4-4S_1\to S_4, S_3-3S_3\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & -5 & c-3a \\ 0 & -5 & d-4a \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4-S_3\to S_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & -5 & c-3a \\ 0 & 0 & d-c-a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in U \cap V \to \begin{cases} c-2d=0 \\ a-d-b=0 \\ b-2a=0 \\ d-a-c=0 \end{cases} \to c=2d, b=2a, a-d-2a=-(a+d)=0, d=-a, c=-2a, b=2a,$$

$d-a-c=-a-a+2a=0.$

$$U \cap V = Sp\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = sp\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ -2a \\ -a \end{pmatrix} = sp\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, U = Sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, V = sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\},$$

$$U+V = Sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$$

תשובה 4

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{pmatrix} \to -p = -\lambda[(4-\lambda)(2-\lambda)-2] - 6\cdot 5(4-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\lambda(\lambda-4) + 2\lambda - 2(4-\lambda) = (2-\lambda)\lambda(\lambda-4) + 4\lambda - 8 =$$

$$= (\lambda-2)[4-\lambda(\lambda-4)] = (\lambda-2)[-\lambda^2+4\lambda+4] = (\lambda-2)[-\lambda^2+\lambda+3\lambda-3] =$$

$$= (\lambda-2)[-\lambda(\lambda-1)+3(\lambda-1)] = (\lambda-2)(\lambda-1)(3-\lambda), \ p = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

נחשב ו״ע הצמודים לע״ע השונים

עבור ע״ע 1.

$$A-1I=\begin{pmatrix}4-1 & 1 & 0\\ 2 & 2-1 & 5\\ 0 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 5\\ 0 & 6 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2+5S_3\to S_2}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 31 & 0\\ 0 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 6 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{5S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to 3x=-y,15x=x=-5y=2y,z=-y=6y,\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 6\end{pmatrix}$$

עבור ע״ע 2

$$A-2I=\begin{pmatrix}4-2 & 1 & 0\\ 2 & 2-2 & 5\\ 0 & 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 5\\ 0 & 6 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2-S_3\to S_2}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & -6 & 0\\ 0 & 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[4S_3\to S_3]{3S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 6 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\to -x=3y,-z=3y,\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

עבור ע״ע 3

$$A-3I=\begin{pmatrix}4-3 & 1 & 0\\ 2 & 2-3 & 5\\ 0 & 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 5\\ 0 & 6 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 6 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{3S_3\to S_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{4S_3\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 16 & 20\\ 0 & 16 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}\to x=-y=6y,2y-z=0,z=2y,\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}6\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל

$$P=\begin{pmatrix}2&3&6\\1&1&1\\6&3&2\end{pmatrix},\left(\begin{array}{cccccc}2&3&6&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\6&3&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[S_1+S_1\to S_1]{S_2\to S_1,S_1-2S_2\to S_2}\left(\begin{array}{cccccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&4&1&5&0\\0&4&3&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[S_3+3S_2\to S_3]{S_1-S_2\to S_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1&0&-3&-1&-4&0\\0&1&4&1&5&0\\0&0&15&3&16&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccccc}1&0&4&6&3&0\\0&1&4&1&5&0\\0&0&1&3&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[S_2+3S_3\to S_2]{S_1+3S_3\to S_1}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&15&9&3\\0&1&0&10&11&3\\0&0&1&3&2&1\end{array}\right).$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&3\\3&2&1\end{pmatrix},PP^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&6\\1&1&1\\6&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29&28&21\\7&8&7\\21&28&29\end{pmatrix}=I$$

וכעת

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&0\\2&2&5\\0&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&6\\1&1&1\\6&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&23&10\\20&29&20\\16&13&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&6\\1&1&1\\6&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\6&1&6\\2&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&6\\1&1&1\\6&3&2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}22&14&14\\49&37&49\\28&21&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\Lambda.\Lambda^7=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&128&0\\0&0&81\cdot 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\cdot 6\end{pmatrix}=\Lambda,$$

$$\Lambda^{2016}=\Lambda^{7\cdot 288}=(\Lambda^7)^{288}=\Lambda^{288}=\Lambda^{7\cdot 41+1}=\Lambda(\Lambda^7)^{41}=\Lambda^{42}=\Lambda^{7\cdot 6}=\Lambda^6=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&64&0\\0&0&27\cdot 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&6\cdot 6\end{pmatrix}=I,A^{2016}=P\Lambda^{2016}P^{-1}=PIP^{-1}=I$$

תשובה 5

יהי $\mathbf{R}_n[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$. נגדיר

$$U=\{f(x)\in\mathbf{R}_n[x]\mid f(-x)=f(x)\},W=\{f(x)\in\mathbf{R}_n[x]\mid f(-x)=-f(x)\},$$

א. הוכח ש U,W תת-מרחבים של $\mathbf{R}_n[x]$.

ב. הוכח ש $\mathbf{R}_n[x]$ הוא סכום של U ו W (ז״א $U+W=M_n(\mathbf{R})$).

כיון שפולינום ה-0 הוא גם זוגי וגם איזוגי אז נובע כי $0\in U\cap W$, ולכן שניהם אינם ריקים. חבור של פונקציות זוגיות הוא זוגי ושל איזוגיות הוא איזוגי וגם מינוס של פונקציה זוגית הוא זוגי ושל איזוגיות הוא איזוגי, ולכן גם U וגם W הם תתי מרחבים של $\mathbf{R}_n[x]$. לכל פולינום $p\in\mathbf{R}_n[x]$ מתקיים כי

$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, ולכן הוא סכום של פונקציה זוגית ואיזוגית,

כלומר $U+W=\mathbf{R}_n[x]$, כדרוש.

תשובה 6

התשובה שלילית, ולהלן דוגמא נגדית. נבחר

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, P^{-1}=P.B=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ אז A דומה לB, B דומה לעצמה,

אבל האם A+B דומה ל B+B? אז $A+B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}, B+B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ והללו אינן דומות כיון שאין להן אותו פולינום אפיני.

תשובה 7

התשובה שלילית. אם המטריצות A,B שקולות, אז יש אותן ממדים mxn, וגם ל C,D יש אותם ממדים axb, אבל לא בטוח כי (m,n)=(a,b) ולכן אי אפשר בכלל ליצור את הסכום A+C.

תשובה 8

התשובה חיובית. כיון שיש להן אותו פולינום עם שרשים שונים, אז שתיהן לכסינות, והע״ע הם השרשים השונים של הפולינום p. שתי מטריצות אלכסוניות עם אותם ע״ע הן דומות זו לזו (על ידי מטריצות תמורה), ולכן A, B דומות

תשובה 9

התשובה חיובית. למשל דוגמא A={(1,1)},B={(2,2)}.

תשובה 10

התשובה כן, לפי הוכחת משפט ההכלה וההדחה.

טיוטה לשאלה 5

Λ^7

$$P^{-1}P=\begin{pmatrix}3&-7&4\\-1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&7&-1\\3&10&-1\end{pmatrix}=I$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&7&-1\\3&10&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-7&4\\-1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&2&-1\\-10&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-7&4\\-1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&24&-14\\-22&54&-31\\-32&77&-44\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-9-\lambda&24&-14\\-22&54-\lambda&-31\\-32&77&-44-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1+S_2-S_3\to S_3}\begin{pmatrix}-9-\lambda&24&-14\\-22&54-\lambda&-31\\1-\lambda&1-\lambda&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\to(\lambda-1)\begin{pmatrix}-9-\lambda&24&-14\\-22&54-\lambda&-31\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2+c_3\to c_2]{c_1+c_3\to c_1}(\lambda-1)\begin{pmatrix}-23-\lambda&10&-14\\-53&23-\lambda&-31\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda-1)[(23-\lambda)(-23-\lambda)-10(-53)]=(\lambda-1)(\lambda^2-529+530)=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000