המכללה האקדמית נתניה ע״ר
רח׳ האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

# מבחן סוף בקורס לינארית ב כתת הנדסאים –סמסטר סתו התשע״ב מועד א

**יום ו**, יז שבט התשע״ב 10-2-2012

- **המורה: גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.**
- **משך המבחן: 3 שעות**
- **התשובות תכתבנה במחברת למעט התשובות לשאלות 6-10 שתענינה בשאלון.**
- **הציון המירבי האפשרי הוא 100 נקודות.**
- **מותרים מחשבונים שאינם מדעיים.**

**בהצלחה**

**חלק א. בחלק זה יש לבחור 3 שאלות מתוך 4. משקל של כל שאלה: 15 נקודות**
**יש לנמק כל תשובה בפרוטרוט.**

**1.** נתונה המטריצה $K=\begin{pmatrix}1&3&5&7\\2&3&4&5\\5&12&19&26\end{pmatrix}$. א. הגדר העתקה לינארית $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים $[L]_E^E=K$ וכאשר E מסמן את הבסיס הסטנדרטי. ב. מצא בסיסים ל Ker(L) ול Im(K) השתמש בבסיסים כדי למצא מטריצות P,Q כך שהמטריצה PKQ תהיה אלכסונית.

**2.** א. בדוק כי המטריצה $A=\begin{pmatrix}-23&3&3\\-40&6&5\\-144&18&19\end{pmatrix}$. לכסינה. ב. חשב את $A^{1000}$. ג. האם המטריצה $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-23&3&3\\-40&6&5\\-144&18&19\end{pmatrix}$. לכסינה? ד. חשב את $B^{1000}$.

3. . נתון הבסיס $B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}3\\13\\16\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}2\\10\\13\end{pmatrix}\right\}$ -ו של $R^3$, ונתונה מטריצה A שאיבריה לא ידועים כך שמתקימים השויונים $Ab_1=2b_1+b_2$, $Ab_2=2b_2$, $Ab_3=0$.
מצא את אברי A.

4. . נתונים המרחבים הלינאריים מעל $\mathbb{R}$. המוגדרים על ידי
$U=Sp\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\},V=Sp\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\},$ מצא בסיסים עבור $U+V,U\cap V$ חזור על השאלה מעל $\mathbb{Z}_2$.

חלק ב: שאלה אחת בת משקל של 15 נקודות:

5. נתון הבסיס הבא של $R^3$ מעל R : $A=\left\{a_1=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\7\\12\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}37\\-41\\37\end{pmatrix}\right\}$ מצא

בסיס אורתונורמלי $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ המקיים כי לכל i, $1\le i\le n$ ,

$Sp\{a_1,...,a_i\}=Sp\{b_1,...,b_i\}$ . מספיק למצוא את הבסיס, אין צורך לבדוק את התכונות.

**חלק ג: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון" ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את התשובה יש לכתוב בשאלון.**

**משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-5 נקודות. יש לבחור 4 שאלות מתוך 5.**

**6.** אם המטריצה הרבועית A לכסינה אז גם המטריצה $A^2$ לכסינה.

נכון לא נכון

נמוק קצר.

7. נניח שA מטריצה רבועית לכסינה ודומה למטריצה האלכסונית D, ונניח כי המטריצה G התקבלה מהמטריצה D על ידי שנוי סדר האיברים על האלכסון. אז A דומה גם למטריצה G.

נכון לא נכון

נמוק קצר.

**8.** נתונים שני וקטורים u,v ב-$R^3$ בעלי רכיבים שלמים, ונניח כי הוקטורים המתקבלים מ u,v מודולו 2 הם בת"ל מודולו 2, וגם הוקטורים המתקבלים מהם מודולו 3 הם בת"ל מודולו 3, אז הוקטורים המקוריים u,v הם בת"ל מעל R.

נכון          לא נכון

נמוק קצר.

**9.** נתונים שני מרחבים וקטוריים **U,V** שמעל אותו שדה ונניח כי dimU=dimV. אז U,V הם איזומורפיים.

נכון          לא נכון

נמוק קצר.

10. נתונה העתקה לינארית $L:V \to V$ ונסמן את ההרכבה של L על עצמה על ידי $L^2$ ונתון כי $Ker(L) = Ker(L^2)$ אז נובע כי $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Im}(L^2)$

נכון          לא נכון

נמוק קצר.

**חלק ד'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות. משקל כל הוכחה 10 נקודות. אם אתה משתמש בטענת עזר עליך לנסח אותה בנפרד מההוכחה.**

**11.** . L:V→W היא העתקה לינארית.ו-B,A בסיסים של V, D,C בסיסים של W,
אז $[L]_A^D = [M]_C^D [L]_B^C [M]_A^B$ . כאשר [L] היא מטריצת ההעתקה בבסיסים הנתונים ו [M] היא מטריצת המעבר מבסיס לבסיס.

**12.** הוכח כי אם $U,W$ תתי מרחבים של V, אז

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = \dim(U + W) .$$

**בהצלחה !**

**תשובות**

תשובה ראשונה

$$K=\begin{pmatrix}1&3&5&7\\2&3&4&5\\5&12&19&26\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&-3&-6&-9\\0&-3&-6&-9\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1+S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&-3&-6&-9\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-S_2/3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

.

ולכן נקבל בסיסים : עבור הגרעין את $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, עבור התמונה את $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\12\end{pmatrix}\right\}$

עבור התחום את $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ עבור הטווח את $D=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

אז נקבל $Q=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&3&0\\5&12&0\end{pmatrix}$. ולכן :

$$\left(\begin{matrix}1&3&1\\2&3&0\\5&12&0\end{matrix}\;\middle|\; I_3\right)\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&1&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-3&-5&-5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1+S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&0&-3&-3&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-S_3/3\to S_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&0&1&1&1/3&-1/3\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2+2S_3\to S_2]{S_1+S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&4/3&-1/3\\0&-3&0&0&5/3&-2/3\\0&0&1&1&1/3&-1/3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-S_2/3\to S_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&4/3&-1/3\\0&1&0&0&-5/9&2/9\\0&0&1&1&1/3&-1/3\end{pmatrix}$$

ואכן $P=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0&12&-3\\0&-5&2\\9&3&-3\end{pmatrix}$. ואז

$$PKQ=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0&12&-3\\0&-5&2\\9&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&5&7\\2&3&4&5\\5&12&19&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&-9&-18\\0&9&18&27\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כדרוש

תשובה 2

סעיף א

$$A=\begin{pmatrix}-23&3&3\\-40&6&5\\-144&18&19\end{pmatrix},-p=\det\begin{pmatrix}-23-x&3&3\\-40&6-x&5\\-144&18&19-x\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2-C_3\to C_2}\det\begin{pmatrix}-23-x&0&3\\-40&1-x&5\\-144&x-1&19-x\end{pmatrix}=$$

$$(x-1)\det\begin{pmatrix}-23-x&0&3\\-40&-1&5\\-144&1&19-x\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1+8C_3\to C_1}(x-1)\det\begin{pmatrix}1-x&0&3\\0&-1&5\\8-8x&1&19-x\end{pmatrix}=$$

$$(x-1)^2\det\begin{pmatrix}1&0&3\\0&-1&5\\8&1&19-x\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1+S_3\to S_3}(x-1)^2\det\begin{pmatrix}1&0&3\\0&-1&5\\8&0&24-x\end{pmatrix}=-(x-1)^2(24-x-24)=-x(x-1)^2$$

נמצא וקטורים עצמיים. עבור 0

$$A=\begin{pmatrix}-23&3&3\\-40&6&5\\-144&18&19\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-6S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}-23&3&3\\6&0&-1\\-6&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1+3S_2\to S_1}\begin{pmatrix}-5&3&0\\6&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to v=\begin{pmatrix}3\\5\\18\end{pmatrix}$$

נמצא וקטורים עצמיים. עבור 1

$$A-I=\begin{pmatrix}-24&3&3\\-40&5&5\\-144&18&18\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3/18\to S_3]{S_1/3\to S_1,S_2/5\to S_2}\begin{pmatrix}-8&1&1\end{pmatrix}\to v=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix},$$

ואכן עבור $P=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{pmatrix}$ נקבל

$$\left(\begin{matrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{matrix}\;\; I_3\right)\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-4&-3&1&0\\0&1&3&-5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+S_2\to S_3]{S_1+2S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-5&-5&2&0\\0&-1&-4&-3&1&0\\0&0&-1&-8&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-4S_3\to S_2]{S_1-5S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&35&-3&-5\\0&-1&0&29&-3&-4\\0&0&-1&-8&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-S_3\to S_3]{-S_2\to S_2}\begin{pmatrix}1&0&0&35&-3&-5\\0&1&0&-29&3&4\\0&0&1&8&-1&-1\end{pmatrix}$$

ואכן נקבל
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}35&-3&-5\\-29&3&4\\8&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ונקבל
$$\begin{pmatrix}35&-3&-5\\-29&3&4\\8&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-23&3&3\\-40&6&5\\-144&18&19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35&-3&-5\\-29&3&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

סעיף ב נובע כי

$$\begin{pmatrix}-23&3&3\\-40&6&5\\-144&18&19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{pmatrix}^{-1}=P\Lambda P^{-1}\to A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^nP^{-1}=P\Lambda P^{-1}=A$$

סעיף ג נובע כי

$$\alpha\begin{pmatrix}-23&3&3\\-40&6&5\\-144&18&19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&5\\5&11&18\end{pmatrix}^{-1}=P\alpha\Lambda P^{-1}\to$$

$$(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-23&3&3\\-40&6&5\\-144&18&19\end{pmatrix})^n=(P\frac{1}{2}\Lambda P^{-1})^n=P\frac{\Lambda^n}{2^2}P^{-1}=P\begin{pmatrix}0.5^n&0&0\\0&0.5^n&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

תשובה 3

עבור $P=\begin{pmatrix}1&3&2\\4&13&10\\5&16&13\end{pmatrix}$ נקבל

$$\left(\begin{matrix}1&3&2\\4&13&10\\5&16&13\end{matrix}\;\; I_3\right)\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-4S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&2&1&0&0\\0&1&2&-4&1&0\\0&1&3&-5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1-3S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-4&13&-3&0\\0&1&2&-4&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-2S_3\to S_2]{S_1+4S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-4&9&-7&4\\0&1&2&-2&3&-2\\0&0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

ואכן נקבל $\begin{pmatrix}1&3&2\\4&13&10\\5&16&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-7&4\\-2&3&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

A מגדירה ה"ל L בבסיס הסטנדרטי E כך ש $[L]_E^E=A$ וכך $[L]_B^B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ונקבל

$$A=[L]_E^E=[L]_B^E[L]_B^B[L]_E^B=P\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&2\\4&13&10\\5&16&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-7&4\\-2&3&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&6&0\\21&26&0\\26&32&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-7&4\\-2&3&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33&-17&8\\137&-69&32\\170&-86&40\end{pmatrix}.$$

ואכן $A\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\21\\26\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\13\\16\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}3\\13\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\26\\32\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\13\\16\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}2\\10\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

**תשובה 4**

$$U=Sp\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\},V=Sp\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\},$$

$$U=Sp\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}\to\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z-y\end{pmatrix}\to z-y=0$$

ואכן קל לבדוק כי שני הוקטורים מקימים את המשואה הזו.

$$V = Sp\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & x\\0 & 1 & y\\1 & 0 & z\end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_1\to S_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & x\\0 & 1 & y\\0 & 0 & z-x\end{pmatrix} \to z-x=0$$

ואכן קל לבדוק כי שני הוקטורים מקימים את המשואה הזו.

לכן בחתוך נקבל:

$$x=y=z \to (x,y,z)=(1,1,1).$$

בסיס של U יכול להיות $\{(1,1,1),(1,0,0)\}$. בסיס של V יכול להבחר $\{(1,1,1),(0,1,0)\}$.
אחודם הוא בסיס של $U+V=\mathbb{Z}_2^{\,3}$. אותם בסיסים יכולים להיות גם מעל R.

**תשובה 5**

$$A=\left\{a_1=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\7\\12\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}37\\-41\\37\end{pmatrix}\right\}$$

לפי ההגדרה $b_1=\dfrac{a_1}{(a_1,a_1)^{0.5}}=\dfrac{1}{(16+9)^{0.5}}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$ שוב לפי ההגדרה

$$c_2=a_2-\frac{(a_2,a_1)}{(a_1,a_1)}a_1=\begin{pmatrix}1\\7\\12\end{pmatrix}-\frac{4+21}{25}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\12\end{pmatrix},b_2=\frac{c_2}{(c_2,c_2)^{0.5}}=\frac{1}{\sqrt{169}}\begin{pmatrix}-3\\4\\12\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-3\\4\\12\end{pmatrix}$$

ולפי ההגדרה

$$c_3 = a_3 - \frac{(a_3,c_1)}{(c_1,c_1)}c_1 - \frac{(a_3,c_2)}{(c_2,c_2)} = \begin{pmatrix} 37 \\ -41 \\ 37 \end{pmatrix} - \frac{148-123}{25}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-111-164+444}{169}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} =$$

ולבסוף

$$= \begin{pmatrix} 37 \\ -41 \\ 37 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -48 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$, b_3 = \frac{c_3}{(c_3,c_3)^{0.5}} = \frac{1}{\sqrt{1296+2304+625}}\begin{pmatrix} 36 \\ -48 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4225}}\begin{pmatrix} 36 \\ -48 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 36 \\ -48 \\ 25 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נכון, כי יש בסיס B של $F^n$ המורכב מוקטורים עצמיים של A, כלומר לכל $v \varepsilon B$ מתקיים $Av=av$. אז לכל $v \varepsilon B$ מתקיים : $A^2 v=Aav=aAv=a^2 v$, כלומר הבסיס הוא גם של ו״ע של $A^2$ עם ע״ע שהם רבועי הע״ע של A.

תשובה 7.

נכון אם G,D מטריצות אלכסוניות עם אותם איברי אלכסון בסדור שונה, נגדיר תמורה f על הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ על ידי : אם האבר הראשון של האלכסון של D הוא במקום i באלכסון של G, אז $f(1)=i$. על ידי f נגדיר מטריצה P, לP יהיו 1-ים במקומות (i,j) רק אם $f(i)=j$. אז P הפיכה, הפוכתה היא אותה מטריצה של התמורה ההפוכה, ומתקיים $PDP^{-1}=G$, כלומר G,D דומות, ואם A דומה לD אז גם דומה לG, כי דמיון הוא יחס שקילות.

תשובה 8

כן כי אם $u,v\varepsilon R^3$ בעלי רכיבים שלמים ות״ל, אז יש r ממשי כך ש v=ru ולכן r חיב להיות רציונלי r=m/n ולכן נקבל שויון של שלמים nv=mu וינבע שויון מודולו 2 ולכן ינבע כי הוקטורים המתקבלים מהם מודולו 2 הם ת״ל, אבל נתון שהם בת״ל, ולכן גם המקוריים בת״ל.

תשובה 9

כן, נניח כי $B=\{b_1,\ldots.b_n\}$ הוא בסיס של U, וכי $C=\{c_1,\ldots.c_n\}$ הוא בסיס של V, נגדיר פונקציה $L:U\rightarrow V$ על ידי : לכל i, $L(b_i)=c_i$. נרחיב את L על כל U לפי הגדרת הלינאריות, ונקבל העתקה. קל לראות כי היא לינארית חח״ע ועל.

תשובה 10

כן כי מתקיים $\mathrm{Im}(L^2)\subset \mathrm{Im}(L)$ וכמו כן
$\dim(\mathrm{Im}(L^2))=\dim(V)-\dim(\ker(L^2))=\dim(V)-\dim(\ker(L))=\dim(\mathrm{Im}(L))$ ומכיון שלתת המרחב יש אותו ממד כמו של המרחב הגדול, הללו אותם מרחבים.