NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. אלגברה לינארית ב, מסלול הנדסאי ערב מועד א התשס"ו. יום ה, ו שבט התשסז 25-1-2007

המרצה: ד"ר גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.

משך המבחן: 2.5 שעות

בהצלחה

חלק א. בחלק זה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. משקל של כל שאלה: 12 נקודות

1. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 12 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ **. מצא עבורה את הפולינום האפיני, את הערכים העצמיים של A, את הוקטורים העצמיים של A ואת המטריצה P כך ש** $P^{-1}AP$ **היא מטריצה אלכסונית.**

2. נביט ב $F=R, V=M_{2,2}(R)$ **אוסף המטריצות 2x2 מעל R, וב-W המוגדר על ידי** $W=\{A\in V | A^T=A\}$**, אוסף המטריצות הסימטריות.**

א. הוכח כי W הוא תת מרחב של V.

ב. הוכח כי $B=\left\{b_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ **הוא בסיס של W.**

טל: (972-9) 8607777 **Tel:** פקס: (972-9) 8844439 **Fax:** עמותה רשומה 580242451

ג. נתון כי $C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}2&4\\4&1\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של W. מצא את מטריצת המעבר מהבסיס B של סעיף ב לבסיס C.

3. יהיו $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $V=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

א. מצא את משואת תת המרחב U.

ב. מצא את משואת תת המרחב V.

ג. מצא בסיס לתת המרחב $U\cap V$

ג. מצא בסיס לתת המרחב $U+V$

4. נביט על F=R ועל V=C[0,b] אסף הפונקציות המוגדרות והרציפות בקטע [0,b] .
נגדיר את הפונקציה: In:V→V על ידי In(f)=g=∫f(x)dx (כאשר g היא האינטגרל הבלתי מסוים של f.) וכך שמתקיים g(0)=0.

א. הוכח כי In היא העתקה לינארית.

ב. נגדיר W בתור תת הקבוצה של כל הפולינומים. הוכח כי W הוא תת מרחב לינארי.

ג. הוכח כי In מעתיק את W ל-W.

ד. הוכח כי הקבוצה $B=\{1,x,x^2,x^3,\ldots,x^n,\ldots\}$ היא בסיס (אינסופי) של W.

ה. האם קים תת מרחב סופי U של W כך ש In מעתיקה אותו לעצמו?

ו. חשב את Ker(In).

ז. (בונוס)מצא את המטריצה של In בבסיס B שנזכר בסעיף ד. רמז: $\int 1dx=x$, $\int xdx=x^2/2$

5. **נניח כי** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **ו-X היא מטריצה 2x2, ונגדיר העתקה לינארית $L:M2(R)\rightarrow M2(R)$ על ידי: $L(X)=AXA^{(-1)}$.**

א. עבור X כלשהיא בטא את L(X).

ב. כתוב את המטריצות X כך ש- L(X)=0.

ג. כתוב את Im(L).

ד. כתוב מהו dim(Ker(L)).

ה. כתוב מהו dim(Im(L)).

6. נתון כי

$A=\left\{\begin{pmatrix}15\\21\\27\end{pmatrix},\begin{pmatrix}31\\45\\59\end{pmatrix}\right\}$ **וכי** **$B=\{b_1,b_2\}\subset R^3$ כי $Sp(A)=Sp(B)\subset R^3$ וכי** $_{B}T_{A}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$

א. כתוב מערכת משוואות ש- b_1 ו- b_2 צריכים לקיים.

ב. מצא את - b_1 ואת- b_2 :

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-4 נקודות. יש לבחור 6 שאלות מתוך 8.

7. נתונה מטריצה רבועית A מסדר n ונתון כי דרגתה קטנה ממש מ-n . אז מרחב הפתרון של המשוואה Av=0 כולל וקטור השונה מ-0. נכון לא נכון

8. נתונה מטריצה A מסדר mxn ונתון כי m<n . אז מרחב הפתרון של המשוואה Av=0 כולל וקטור השונה מ-0. נכון לא נכון

9. נתונות מטריצות A,B רבועיות ולכסינות . אז A+B לכסינה. נכון לא נכון

10. נתונים שלשה בסיסים C,B,A של המרחב הוקטורי V, ונתון כי מטריצות המעבר $_B[T]_A$ ו- $_C[T]_A$ הן בעלות איברים ממשיים אי שליליים. אז $_C[T]_B$ היא בעלת איברים ממשיים אי שליליים. נכון לא נכון

11. נתונים שלשה בסיסים C,B,A של המרחב הוקטורי V, ונתון כי מטריצות המעבר $_B[T]_A$ ו- $_C[T]_B$ הן בעלות איברים ממשיים אי שליליים. אז $_C[T]_A$ היא בעלת איברים ממשיים אי שליליים. נכון לא נכון

12. נתונה $T:V\to V$ העתקה לינארית ממרחב לינארי לעצמו. נביט על $T^2=T\cdot T:V\to V$. ההרכבה של T על עצמו אז $Ker(T)\subseteq Ker(T^2)$. נכון לא נכון

13. נתונה $T:V\to V$ העתקה לינארית ממרחב לינארי לעצמו. נביט על $T^2=T\cdot T:V\to V$. ההרכבה של T על עצמו אז $Im(T)\subseteq Im(T^2)$. נכון לא נכון

14. הדרגה של מכפלת המטריצות AB שוה לסכום הדרגות של A ושל B.

נכון לא נכון

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות. משקל כל הוכחה 8 נקודות.

15 הוכח את המשפט: נתון כי $dim(V)=n$ וכי $S=\{s_1,\ldots s_n\}$ קבוצת וקטורים ב-V. הטענות הבאות שקולות: א. S בת"ל. ב. S פורשת. ג. S בסיס.

16. הוכח כי אם L:V→W העתקה לינארית אז

$$\dim(V) = \dim(Ker(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L))$$

בהצלחה !

תשובות

1. נחשב את הפולינום האפיני של A

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}4-\lambda & 2 & -2\\ 0 & 5-\lambda & -2\\ 12 & 6 & -6-\lambda\end{pmatrix},\ p=-\det(A-\lambda I).$$

נפעיל על הדטרמיננט פעולות שורה אשר שומרות על ערך הדטרמיננט.

$$-p=\det\begin{pmatrix}4-\lambda & 2 & -2\\ 0 & 5-\lambda & -2\\ 12 & 6 & -6-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2+C_3\to C_3}=\det\begin{pmatrix}4-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 5-\lambda & 3-\lambda\\ 12 & 6 & -\lambda\end{pmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננט לפי העמודה הימנית.

$$-p=-\lambda(4-\lambda)(5-\lambda)+(3-\lambda)[6(4-\lambda)-24]=-\lambda(4-\lambda)(5-\lambda)+(3-\lambda)[24-6\lambda-24]=$$
$$-\lambda(4-\lambda)(5-\lambda)+(3-\lambda)[-6\lambda]=-\lambda[(4-\lambda)(5-\lambda)-6(3-\lambda)]=$$
$$=-\lambda[(20-9\lambda+\lambda^2)-18+6\lambda]=-\lambda[(20-9\lambda+\lambda^2)-18+6\lambda]=$$
$$=-\lambda[\lambda^2-3\lambda+2]=-\lambda[(\lambda-2)(\lambda-1)]\to p=\lambda[(\lambda-2)(\lambda-1)]$$

ולכן הע"ע הם 1,2 ו-0 נחשב וקטורים עצמיים הצמודים לע"ע השונים.

עבור 0 נקבל:

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 0 & 5 & -2\\ 12 & 6 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow[S_1/2\to S_1]{S_3-3S_1\to S_3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2-2S_1\to S_1}\begin{pmatrix}-4 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

ונקבל כי (3,4,10) הוא ו"ע.

עבור 1 נקבל:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 12 & 6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-4S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2S_2+S_1\to S_1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל כי (2,3,6) הוא ו"ע.

עבור 2 נקבל:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 12 & 6 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-6S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ונקבל כי (1,2,3) הוא ו"ע.

לכן נקבל את המטריצות P,Q :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 3 \end{pmatrix}, Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ **, ולכן נקבל:**

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 12 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.2

א.נוכיח את אקסיומות תת המרחב. מטריצת ה-0 סימטרית, ונותר לבדוק סגירות לחבור ולכפל בסקלר, ואכן:

$$S+T=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+d & b+e \\ b+e & c+f \end{pmatrix}, xS=x\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa & xb \\ xb & xc \end{pmatrix}$$

ב.נעביר את B לצורה וקטורית:

וצריך להעביר את הוקטורים , $B=\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

לעמודה ולבדק את הדרגה שלה. ונקבל:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-2S_2\to S_1}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{S_1+2S_3\to S_1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה היא 3 ולכן זהו אכן בסיס.

ג. דומה ל-ב.

$$C=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-S_1\to S_3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה היא 3 ולכן זהו אכן בסיס.

ד.

נמצא את הקואורדינטות:

$$\begin{pmatrix} C & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-S_3\to S_1}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-4S_2\to S_3]{S_1+2S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -7 & -11 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+2.5S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5.5 & 9 & 6 \end{pmatrix}\xrightarrow{S_1/2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2.5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5.5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

ונבדק:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.5 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & -3 \\ 5.5 & 9 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ **, כדרוש.**

3 . א. נדרג ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{pmatrix}\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & z \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 3 & x \end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & z \\ 0 & -3 & y-2z \\ 0 & -3 & x-3z \end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & z \\ 0 & -3 & y-2z \\ 0 & 0 & x-y-z \end{pmatrix}$$

ולכן שני הוקטורים בת"ל ומשואת התת מרחב היא x-y-z=0.

ב. נדרג ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & 3 & z+x \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & z \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & 0 & y+z-x \end{pmatrix}$$

ולכן שני הוקטורים בת"ל ומשואת התת מרחב היא x-y-z=0.

ג,ד. כיון שכך, U=V ולכן $U \cap V = U+V = U = V$ ולמשל A הוא בסיס של שניהם.

4. א. כיון ש- $\square(f(x)+g(x))dx=\square f(x)dx+\square g(x)dx,\ \square(af(x))dx=a\square f(x)dx$ וכיון שאינטגרל של פונקציה רציפה היא גזירה ולכן רציפה, נובע כי In היא העתקה לינארית.

ב. כיון שסכום פולינומים הוא פולינום ומכפלת פולינום בסקלר היא פולינום, W הוא תמ"ו.

ג. כיון שאינטגרל של פולינום היא פולינום לכן ההעתקה היא מ-W לעצמו.

ד. כל פולינום (סופי) הוא סכום (סופי) של אברי הקבוצה B ולכן היא פורשת. כל צרוף לינארי סופי של אברי B הוא פולינום, והעובדה שהצרוף זהה לפונקצית ה-0 מחייב כי כל המקדמים שוים 0. לכן זוהי קבוצה בת"ל ובסיס.

ה. לכל פולינום סופי, האינטגרל שלו הוא ממעלה יותר גבוהה. לכן, אם U תת מרחב העל ממד סופי, יש לו דרגה סופית, ואז האינטגרל שלו בעל דרגה יותר מדי גבוהה. לכן אין כזה U, למעט תת מרחב ה-0, כיון ש-In(0)=0.

ח. Ker(In) הוא תת מרחב, ואיננו כל W. כיון שלכל פולינום האינטגרל שלו בעל התכונה ש-g(0)=0 הוא יחיד, אז In חח"ע , ולכן Ker(In)=0.

ז. ידוע כי $\square 1dx=x+c,\ \square\ xdx=x^2/2+c,\ \square\ x^2\,dx=x^3/3+c,\ldots$ וכיון שבחרנו כי g(0)=0 אז $In(1)=x, In(x)=x^2/2, In(x^2)=x^3/3$ וכדומה, ונקבל את המטריצה הבאה שהיא חלק מהתשובה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

.5

א. כיון ש-A היא מטריצה אלמנטרית קל לחשב את ההפוכה שלה ונקבל:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L(X) = AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d-a-c \\ c & d-c \end{pmatrix}.$$

ב. L(X)=0 גורר כי $\begin{pmatrix} a+c & b+d-a-c \\ c & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to c = 0, \to d-c = 0 \to d = 0$
$\to a+c = 0, \to a = 0 \to d = 0.$

לכן, Ker(L)=0 ולכן dim(Ker(L))=0 ולכן לפי משפט הממד, dim(Im(L))=4 ולכן Im(L) הוא כל $M_{2,2}(R)$.

6. נסמן $b_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$ **אז מתקיים כי**

$$\begin{pmatrix}15\\21\\27\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix},\begin{pmatrix}31\\45\\59\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}15&31\\21&45\\27&59\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&31\\21&45\\27&59\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1.5\\1&-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7\\3&9\\5&11\end{pmatrix}$$

7. כן, כיון שדרגתה היא dim(Im(L)) עבור L המוגדרת על ידי A בבסיס הסטנדרטי.

אז dim(Im(L))<n ולכן dim(Ker(L))□1 כדרוש.

8. כן, כיון שדרגתה היא dim(Im(L)) עבור L המוגדרת על ידי A בבסיסים

הסטנדרטיים, ונתון rank(A□)m<n. אז dim(Im(L))<n ולכן dim(Ker(L))□1 כדרוש.

9. לא נכון ולהלן דוגמא נגדית: נגדיר את A להיות $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ **ואת B להיות** $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

אז A+B שוה ל $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. **נבדק כי B,A לכסינות על ידי זה שנראה כי יש להן ערכים**

עצמיים שונים. ואכן $p_A=p_B=\lambda(\lambda-1)$ **ואילו ולכן יש לה שני ערכים עצמיים**

זהים. ואכן $p_{A+B}=(\lambda-1)(\lambda-1)$ **אבל הפתרון של הע"ע 1 הוא רק הוקטור** $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

10. לא, למשל $_B[T]_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **ו-** $_C[T]_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **אבל**

$_C[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **.**

11. כן כי $_B[T]_A \; _C[T]_B = \; _C[T]_A$ **ומכפלת מטריצות עם איברים חיוביים גם היא כזו.**

12. כן כי אם $T(v)=0$ **אז נובע כי** $T(T(v))=T(0)=0$**.**

13. לא למשל $T:R^3 \to R^3$ **שתוגדר על ידי** $T((x,y,z))=(0,x,y)$**. אז** $(0,1,2)$ **מוכל ב** $Im(T)-Im(T^2)$**.**

14. לא כי אם A מטריצת ה-0 דרגתה 0 ונקהל סתירה כי גם AB מטריצת 0 . הסתירה תתקים אם דרגת B חיובית.

תשובות לשאלות:

1. נחשב את u ואת v ואז נוכל לבצע בהם חתוך וסכום.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & b \\ 3 & 6 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & -6 & c-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & c-3a-2b+4a \end{pmatrix}$$

ולכן המשואה המאפינת את U היא a+c-2b=0. נבצע את אותו תהליך עבור V.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+S_3\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & -1 & a+c \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+S_3\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix}$$

ולכן המשואה המאפינת את V היא c+b+a=0. ולכן בחתוך, a+c=2b, a+c=-b כלומר בחתוך 2b=-b ולכן 3b=0 או b=0. המשואה הנוספת הופכת להיות a+c=0 ולכן נקבל בסיס של החתוך (1,0,-1). האחוד הוא כל R^3 ולכן למשל הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס לסכום.

2. נפעל פעולות שורה אלמנטריות על A ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 4 \\ 2 & 1 & 4 & k \\ 1 & 2-k & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 4 \\ 0 & -3 & 4-2k & k-8 \\ 0 & -k & 1-k & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{kS_2-3S_3\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 4 \\ 0 & -3 & 4-2k & k-8 \\ 0 & 0 & 2k^2-7k+3 & -k^2+8k-15 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל משואה $(2k-1)(k-3)z=-(k-3)(k-5)$.

כדי שלמרחב הפתרונות $(Ker(L_A))$ יהיה ממד מקסימלי , על השורה השלישית למתאפס,

ולכן צריך להתקים k=3

3. נחשב את הפולינום האפיני

$$\det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ -4 & 1-x & 2 \\ -4 & -7 & 8-x \end{pmatrix} = -x((1-x)(8-x)+14)-(4(x-8)+8) = -x(x^2-9x+22)-(4x-24) =$$

$$= -x^3+9x^2-26x+24 = -(x-2)(x-3)(x-4).$$

נחשב את הוקטורים העצמיים:

עבור $\lambda=2$ נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -0 \\ -4 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+3S_1\to S_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2/3\to S_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן וקטור עצמי הצמוד לעע $\lambda=2$ הוא (1,2,3).

עבור $\lambda=3$ נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&-2&2\\-4&-7&5\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1-S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&3&-2\\-4&-2&2\\0&-5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2+4S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&10&-5\\0&-5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{2S_3+S_2\to S_3}\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&-5&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2/(-5)\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&1&-3/5\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-3S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-1/5\\0&1&-3/5\end{pmatrix}$$

ולכן וקטור עצמי הצמוד לעע λ=2 הוא (0.2,0.6,1). או טוב יותר (1,3,5).

עבור λ=4 נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix}-4&1&0\\-4&-3&2\\-4&-7&4\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&-4&2\\0&-8&4\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2/2\to S_2}\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

ולכן וקטור עצמי הצמוד לעע λ=2 הוא (0.25,1,0.5). או טוב יותר (1,4,2).

.4

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=b_1-b_2.$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=b_1-b_3.$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=b_1.$$

ולכן:

$${}_BT_A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

שאלה 5

ולכן: L(X)=AX-XA

$$L(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\a+c&b+d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+b&a+b\\c+d&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c-b&d-a\\a-d&b-c\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$L(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}c-b&d-a\\a-d&b-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow b=c,d=a.$$

ולכן Ker(L) היא אוסף המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}.$ וממד תת המרחב הוא 2.

נשים לב כי Im(L) הן כל המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix}x&y\\-y&-x\end{pmatrix}.$, וזהו תת מרחב בעל ממד 2.

תשובה 6. לפי הנתון $A=\left\{\begin{pmatrix}13\\17\\21\end{pmatrix},\begin{pmatrix}18\\24\\30\end{pmatrix}\right\}$ וכי $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\y\end{pmatrix}\right\}$ וכי ${}_BT_A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

ולכן נקבל את המשוואות:

$\begin{pmatrix}13\\17\\21\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\2\\x\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}4\\5\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}18\\24\\30\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\x\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}4\\5\\y\end{pmatrix}.$ ולכן נקבל מערכת משוואות: $\begin{cases}x+3y=21\\2x+4y=30\end{cases}$

ופתרונה x=3,y=6.

תשובה 7

נפתח את מערכת המשוואות:

למטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\2&7&1&3\\3&9&3&5\end{pmatrix}$ ונעשה פעולות שורה:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&5\\2&7&1&4\\3&9&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&3&-5&-6\\0&3&-6&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&3&-5&-6\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2-5S_3\to S_2]{S_1+3S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&2&0&-4\\0&3&0&9\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3/(-1)\to S_3]{S_2/3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-4\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-2S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&-10\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

ולכן אבר של Ker(A) הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10w \\ -3w \\ -3w \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 8}.

אם ${}_A T_B$. מכילה רציונליים, אז הפוכתה ${}_B T_A$. גם היא מעל Q.

תשובה 9

התשובה היא לא. דוגמא נגדית: $f(x)=(x,x), g(x,y)=y, U=W=R, V=R^2$, אז $gf(x)=x$ היא חח"ע, g אינה חח"ע, וההעתקות הן לימאריות.

תשובה 10

. התשובה היא כן. נביט במטריצה: נכתב את הוקטורים $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ בעמודות ונקבל מטריצה F. הנתון הוא כי מכפלת המטריצות $F\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ היא הפיכה. כיון שגם $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ הפיכה, אז גם F הפיכה כמכפלת הפיכות.

ולכן שתי העמודות הראשונות פורשות את הקבוצה הפורשת המרכבת משלשת הוקטורים.

11. התשובה לא. $f=:x^3:R\to R$ היא דוגמא נגדית.

12. התשובה היא לא. כי אז 1 של Z_3 צריך לכפול את 1 של Q. התוצאה אמורה להיות מספר רציונלי a כך 3a=0 ולכן נובע כי a=0 שתירמ לאקסיומות כפל בסקלר.

13. התשובה היא כן: אם f(1)=g(1)=0 אז (f+g)(1)=f(1)+g(1)=0+0=0.

14.לא, למשל הוקטורים (1,0),(0,1),(1,1) הם תלויים לינארית, אבל אף שנים מהם אינם פרופורציוניים.

15. לא, למשל למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ישנו הפולינום האפיני $(x-1)(x+1)^2$, אבל יש לה רק שני וקטורים עצמיים: (1,0,0) אשר צמוד ל $\lambda=1$, ו- (0,1,0) אשר צמוד ל $\lambda=-1$

16. כן, למשל למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ יש שני וקטורים עצמיים, (1,0) אשר צמוד ל $\lambda=2$ ו- (0,1) אשר צמוד ל $\lambda=3$.