המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס לינארית ב כתת ערב –סמסטר סתו התשע"ה מועד ב

יום ב, כד ניסן ה'תשע"ה 13-4-2015

- **המורה: גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.**
- **משך המבחן: 3 וחצי שעות**
- **התשובות תכתבנה במחברת למעט התשובות לשאלות 6-10 שתענינה בשאלון.**
- **הציון המירבי האפשרי הוא 100 נקודות.**
- **מותרים מחשבונים שאינם מדעיים.**

בהצלחה

חלק א. בחלק זה יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. משקל של כל שאלה: 15 נקודות

יש לנמק כל תשובה בפרוטרוט.

1. נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$ $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

א. לכסן את המטריצה A.

ב. חשב את A^{2015} ואת A^{2016}.

2. נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 16 & 4 \end{pmatrix}$.

מצא מטריצה B שקולה ל A כך שעל חלק מהאלכסון הראשי של B מתקיים כי $B_{i,i}=i$ ובכל מקום אחר נמצאים אפסים. פרט את השלבים.

3. נתונים המרחבים הלינאריים מעל $\mathbb{R}$. המוגדרים על ידי

$V=Sp\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}, U=Sp\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. מצא בסיסים עבור $U+V, U\cap V$.

4. נתונים הבסיס $B=\left\{b_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ של $\mathbb{R}^3$, ה"ל

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, ומטריצת העתקה $[f]_B^B=\begin{pmatrix} 1 & d & 2 \\ 1 & 0 & a \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$. מצא את ערכי a.c,d אם

ידוע כי $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$ $A=\begin{pmatrix} -9 & 24 & -14 \\ -22 & 54 & -31 \\ -32 & 77 & -44 \end{pmatrix}$

א. חשב את A^{2017}.

ג. חשב את A^{2016}.

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון" ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את התשובה יש לכתוב <u>בשאלון</u>.

משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-5 נקודות. יש לבחור 4 שאלות מתוך 5.

6. נתונות מטריצות A, B רבועיות בעלות אותו ממד n אז הפולינום האפיני של מטריצת הסכום $A+B$ הוא סכום הפולינומים האפיניים של A ושל B.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

7. נתונות מטריצות A, B רבועיות בעלות אותו ממד n אז הפולינום האפיני של מטריצת המכפלה AB הוא מכפלת הפולינומים האפיניים של A ושל B.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

8. נתונות מטריצות A, B רבועיות בעלות אותו ממד n, ונתון שיש להן אותו פולינום אפיני p. אז הן חיבות להיות דומות.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

9. נתונה קבוצה ב"תל A. אז היא פורשת.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

10. יתכנו שני בסיסים שונים A, B של אותו מרחב כך ש $A \cup B$ היא קבוצה ת"ל.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות. משקל כל הוכחה 10 נקודות. אם אתה משתמש בטענת עזר עליך לנסח אותה בנפרד מההוכחה.

11. $L:V\to W$ היא העתקה לינארית. אז

$$\dim(\mathrm{Ker}(L))+\dim(\mathrm{Im}(L))=\dim(V)$$

.

12. מטריצה A היא לכסינה אם ורק אם לכל ערך עצמי שלה הרבוי האלגברי והגיאומטרי שווים.

בהצלחה !

תשובות

תשובה ראשונה, א

$$A=\begin{pmatrix}-3&0&2\\-4&-1&4\\-4&0&3\end{pmatrix},-p=\det\begin{pmatrix}-3-\lambda&0&2\\-4&-1-\lambda&4\\-4&0&3-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{-S_1+S_3\to S_3}\det\begin{pmatrix}-3-\lambda&0&2\\-4&-1-\lambda&4\\\lambda-1&0&1-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$(\lambda+1)(\lambda-1)\det\begin{pmatrix}-3-\lambda&0&2\\-4&-1&4\\1&0&-1\end{pmatrix}=\xrightarrow{S_1+2S_3\to S_1}(\lambda+1)^2(\lambda-1)\det\begin{pmatrix}-1&0&0\\-4&-1&4\\1&0&-1\end{pmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

נמצא וקטורים עצמיים. עבור -1

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-3-\lambda&0&2\\-4&-1-\lambda&4\\-4&0&3-\lambda\end{pmatrix}\to A+I=\begin{pmatrix}-2&0&2\\-4&0&4\\-4&0&4\end{pmatrix}-x+z=0,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ועבור 1 $A-\lambda I=\begin{pmatrix}-3-\lambda&0&2\\-4&-1-\lambda&4\\-4&0&3-\lambda\end{pmatrix},A-I=\begin{pmatrix}-4&0&2\\-4&-2&4\\-4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\2z\\2z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

ואכן עבור $P=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ נקבל

$$\left(\begin{matrix}0&1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{matrix}\;I_3\right)\xrightarrow[S_3\leftrightarrow S_2]{S_1\leftrightarrow S_2}\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\\0&1&1&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\\0&0&-1&1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2+2S_3\to S_2]{S_1+2S_3\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&-2\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

ואכן נקבל $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ונקבל כדרוש

סעיף ב. $\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&0&2\\-4&-1&4\\-4&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-2&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\Lambda$

כיון ש $\Lambda^{2015}=\Lambda,\Lambda^{2016}=I$ נובע כי $A^{2015}=A,A^{2016}=I$

תשובה 2

א. $A=\begin{pmatrix}1&2&5&1\\3&4&6&1\\5&8&16&4\end{pmatrix}$. נגדיר $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ על ידי $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+5z+w\\3x+4y+6z+w\\5x+8y+16z+4w\end{pmatrix}$.

אז ברור כי $[f]_{E(4)}^{E(3)}=A$

ב,ג. נפתור את המערכת, אז

$$\begin{pmatrix}1&2&5&1\\3&4&6&1\\5&8&16&4\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&5&1\\0&-2&-9&-2\\0&-2&-9&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1+S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-4&-1\\0&-2&-9&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2+2S_3\to S_2]{S_1+S_3\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-4&0\\0&-2&-9&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}x-4z=0,2y+9z=0,w=0,\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}4\\ \frac{-9}{2}\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{z}{2}\begin{pmatrix}8\\-9\\2\\0\end{pmatrix},B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\-9\\2\\0\end{pmatrix}\right\},$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\right\},[f]_B^C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix},[R]_B^{E(4)}=\begin{pmatrix}1&0&0&8\\0&2&0&-9\\0&0&0&2\\0&0&3&0\end{pmatrix}.$$

$$[R]_A^{E(4)},\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\3&4&1&0&1&0\\5&8&4&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&-2&-2&-3&1&0\\0&-2&-1&-5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_1+S_2\to S_1]{S_3-S_2\to S_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&1&0\\0&-2&-2&-3&1&0\\0&0&1&-2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2+2S_3\to S_2,]{S_1+S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&0&1\\0&-2&0&-7&-1&2\\0&0&1&-2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-S_2/2\to S_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&0&1\\0&-2&0&3.5&0.5&-1\\0&0&1&-2&-1&1\end{pmatrix}$$

ונבדוק

$$\begin{pmatrix}-4&0&1\\3.5&0.5&-1\\-2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&1\\5&8&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

כדרוש. ונבדוק

$$\begin{pmatrix}-4&0&1\\3.5&0.5&-1\\-2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&5&1\\3&4&6&1\\5&8&16&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&8\\0&2&0&-9\\0&0&0&2\\0&0&3&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-4&0\\0&1&4.5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&8\\0&2&0&-9\\0&0&0&2\\0&0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}$$

כדרוש.

תשובה 3

$$\begin{pmatrix}4&3&a\\3&2&b\\2&1&c\\1&0&d\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-2S_4\to S_3]{S_1-4S_4\to S_1,S_2-3S_4\to S_2}\begin{pmatrix}0&3&a-4d\\0&2&b-3d\\0&1&c-2d\\1&0&d\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2-2S_3\to S_2]{S_1-3S_3\to S_1}\begin{pmatrix}0&0&(a-4d)-3(c-2d)\\0&0&(b-3d)-2(c-2d)\\0&1&c-2d\\1&0&d\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&a\\2&1&b\\3&2&c\\4&3&d\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2-2S_1\to S_2]{S_4-4S_1\to S_4,S_3-3S_3\to S_3}\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b-2a\\0&2&c-3a\\0&3&d-4a\end{pmatrix}\xrightarrow[S_4-3S_2\to S_4]{S_3-2S_2\to S_3}\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b-2a\\0&0&(c-3a)-2(b-2a)\\0&0&(d-4a)-3(b-2a)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in U\cap V\to\begin{cases}(a-4d)-3(c-2d)=0\\(b-3d)-2(c-2d)=0\\(c-3a)-2(b-2a)=0\\(d-4a)-3(b-2a)=0\end{cases}\to\begin{matrix}S1: a+2d-3c=0\\S2: b+d-2c=0\\S3: c+a-2b=0\\S4: d+2a-3b=0\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\0&1&-2&1\\1&-2&1&0\\2&-3&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\0&1&-2&1\\0&-2&4&-2\\0&-3&6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.\dim(U\cap V)=2, U\cap V=U=V=U+V$$

תשובה 4

נשים לב כי $3b_1-b_2-b_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ולכן העובדה $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ מתרגמת ל

$f(3b_1-b_2-b_3)=3b_1-b_2-b_3$ כלומר $\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ הוא ו״ע עם ע״ע 1 של המטריצה $[f]_B^B$ ולכן

$$\begin{pmatrix}1 & d & 2\\ 1 & 0 & a\\ c & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\to 1-d=3, 3-a=-1, 3c-2=-1\to d=-2, a=4, c=1/3$$

תשובה 5

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-9-\lambda & 24 & -14\\ -22 & 54-\lambda & -31\\ -32 & 77 & -44-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1+S_2-S_3\to S_3}\begin{pmatrix}-9-\lambda & 24 & -14\\ -22 & 54-\lambda & -31\\ 1-\lambda & 1-\lambda & \lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\to(\lambda-1)\begin{pmatrix}-9-\lambda & 24 & -14\\ -22 & 54-\lambda & -31\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2+c_3\to c_2]{c_1+c_3\to c_1}(\lambda-1)\begin{vmatrix}-23-\lambda & 10 & -14\\ -53 & 23-\lambda & -31\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-1)[(23-\lambda)(-23-\lambda)-10(-53)]=(\lambda-1)(\lambda^2-529+530)=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

לכן כיון שהע״ע שונים, A לכסינה, והע״ע שלה הם 1,i,-i, כיון שכל האיברים הם מסדר 4 אז $\Lambda^4=I, A^4=I$ ולכן $A^{4n}=I, A^{4n+1}=A$

תשובה 6

התשובה שלילית, ולהלן דוגמא נגדית. נבחר

$$A=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\to A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, p_A=p_B=(x-1)(x-2), p_A+p_B=2(x-1)(x-2), p_{A+B}=(x-2)(x-4)$$

תשובה 7

התשובה שלילית, ולהלן דוגמא נגדית. נבחר

$$A=B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\to AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, p_A=p_B=(x-1)(x-2), p_Ap_B=[(x-1)(x-2)]^2, p_{AB}=(x-1)(x-4)$$

תשובה 8

התשובה שלילית, ולהלן דוגמא נגדית. נבחר

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, p_A=p_B=(x-1)^2$$

אבל A לכסינה ו B איננה לכסינה.

תשובה 9

התשובה שלילית, ולהלן דוגמא נגדית. נבחר $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ שהיא בת״ל ואיננה פורשת

תשובה 10

התשובה כן, ולהלן דוגמא . נבחר

$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, B=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}, A\cup B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$ שהיא בת״ל ואיננה

פורשת