המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס לינארית ב כתת הנדסאים –סמסטר סתו התשע"ב מועד ב

יום ב, כה אדר התשע"ב 19-3-2012

- **המורה: גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.**
- **משך המבחן: 3 שעות**
- **התשובות תכתבנה במחברת למעט התשובות לשאלות 6-10 שתענינה בשאלון.**
- **הציון המירבי האפשרי הוא 100 נקודות.**
- **מותרים מחשבונים שאינם מדעיים.**

בהצלחה

חלק א. בחלק זה יש לבחור 3 שאלות מתוך 4. משקל של כל שאלה: 15 נקודות
יש לנמק כל תשובה בפרוטרוט.

1. נתונה המטריצה $K=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 12 & 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$. א. הגדר העתקה לינארית $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים $[L]_E^E=K$ וכאשר E מסמן את הבסיס הסטנדרטי. ב. מצא בסיסים ל $\mathrm{Ker}(L)$ ול $\mathrm{Im}(K)$ השתמש בבסיסים כדי למצא מטריצות P,Q כך שהמטריצה PKQ תהיה אלכסונית.

2. א. בדוק כי המטריצה $A=\begin{pmatrix} 14 & -57 & -99 \\ -9 & 34 & 61 \\ 7 & -27 & -48 \end{pmatrix}$ לכסינה. ב. חשב את A^{1001}. ג. האם המטריצה $B=\begin{pmatrix} 14 & -9 & 7 \\ -57 & 34 & -27 \\ -99 & 61 & -48 \end{pmatrix}$ לכסינה? ד. חשב את B^{391}.

3. נתון הבסיס $B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}4\\13\\9\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}5\\16\\12\end{pmatrix}\right\}$ של R^3, ונתונה מטריצה A שאיבריה לא ידועים כך שמתקיימים השויונים $Ab_1=3b_1+b_2$, $Ab_2=3b_2$, $Ab_3=0$.
מצא את אברי A.

4. . נתונים המרחבים הלינאריים מעל $\mathbb{R}$. המוגדרים על ידי $U=Sp\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}, V=Sp\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\}$, מצא בסיסים עבור $U+V, U\cap V$

חלק ב: שאלה אחת בת משקל של 15 נקודות:

5. נתון הבסיס הבא של R^3 מעל R: $A=\left\{a_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ מצא בסיס

אורתונורמלי $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ המקיים כי לכל i, $1\le i\le n$, $Sp\{a_1,...,a_i\}=Sp\{b_1,...,b_i\}$.

מספיק למצוא את הבסיס, אין צורך לבדוק את התכונות.

חלק ג: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון" ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את התשובה יש לכתוב <u>בשאלון</u>.

משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-5 נקודות. יש לבחור 4 שאלות מתוך 5.

6. נתונים תתי מרחבים W,U של V ולהם בסיסים B,A בהתאמה. אז $A\cup B$. היא בסיס של U+V

נכון לא נכון

נמוק קצר.

7. נתונים תתי מרחבים W,U של V. אז $U\cup W$. איננו תת מרחב של V.

נכון לא נכון

נמוק קצר.

8. כל מטריצה לכסינה היא גם הפיכה.

נכון לא נכון

נמוק קצר.

9. יש מרחבים וקטוריים בעלי מספר סופי של וקטורים.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

10. סכום של מטריצות לכסינות היא מטריצה לכסינה.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

חלק ד'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

משקל כל הוכחה 10 נקודות. אם אתה משתמש בטענת עזר עליך לנסח אותה בנפרד מההוכחה.

11. . $L:V\to W$ היא העתקה לינארית.ו-B,A בסיסים של V, D,C בסיסים של W,
אז $[L]_A^D=[M]_C^D[L]_B^C[M]_A^B$. כאשר [L] היא מטריצת ההעתקה בבסיסים הנתונים ו [M] היא מטריצת המעבר מבסיס לבסיס.

12. הוכח כי אם : $L:V\to W$ העתקה לינארית בין מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה, אז $\dim(Ker(L))+\dim(\mathrm{Im}(L))=\dim(V)$.

בהצלחה !

תשובות

תשובה ראשונה

$$K=\begin{pmatrix}2&3&4&5\\3&5&7&9\\12&19&26&33\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2-S_1\to S_1]{S_3-6S_1\to S_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&5&7&9\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3+S_2\to S_3]{S_1+2S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל בסיסים : עבור הגרעין את $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, עבור התמונה את $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\19\end{pmatrix}\right\}$

עבור התחום את $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ עבור הטוח את $D=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\19\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

אז נקבל $Q=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&5&0\\12&19&0\end{pmatrix}$. ולכן :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&\\3&5&0&I_3\\12&19&0&\end{array}\right)\xrightarrow[S_2-S_1\to S_1]{S_3-6S_1\to S_3}\begin{pmatrix}1&2&-1&-1&1&0\\3&5&0&0&1&0\\0&1&-6&-6&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&-1&1&0\\0&-1&3&3&-2&0\\0&1&-6&-6&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3+S_2\to S_3]{S_1+2S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&5&5&-3&0\\0&-1&3&3&-2&0\\0&0&-3&-3&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2+S_3\to S_2}\begin{pmatrix}1&0&5&5&-3&0\\0&-1&0&0&-4&1\\0&0&-3&-3&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-S_3/3\to S_3]{-S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&5&5&-3&0\\0&1&0&0&4&-1\\0&0&1&1&2/3&-1/3\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-5S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-19/3&5/3\\0&1&0&0&4&-1\\0&0&1&1&2/3&-1/3\end{pmatrix}$$

ואכן $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-19&5\\0&12&-3\\3&2&-1\end{pmatrix}$. ואז

$$PKQ=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-19&5\\0&12&-3\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4&5\\3&5&7&9\\12&19&26&33\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&-3&-6\\0&3&6&9\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כדרוש

תשובה 2

סעיף א

$$A=\begin{pmatrix}14&-57&-99\\-9&34&61\\7&-27&-48\end{pmatrix},-p=\det\begin{pmatrix}14-x&-57&-99\\-9&34-x&61\\7&-27&-48-x\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2+4C_1\to C_2}\det\begin{pmatrix}14-x&-1-4x&-99\\-9&-2-x&61\\7&1&-48-x\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1-4S_2\to S_1}\det\begin{pmatrix}50-x&7&-343\\-9&-2-x&61\\7&1&-48-x\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-7S_3\to S_1}\det\begin{pmatrix}1-x&0&-7+7x\\-9&-2-x&61\\7&1&-48-x\end{pmatrix}=$$

$$=(x-1)\det\begin{pmatrix}-1&0&7\\-9&-2-x&61\\7&1&-48-x\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3+7C_1\to C_3}(x-1)\det\begin{pmatrix}-1&0&0\\-9&-2-x&-2\\7&1&1-x\end{pmatrix}=$$

$$=(x-1)[(1-x)(2+x)-2]=(x-1)(-x^2-x)=-x(x-1)(x+1)$$

נמצא וקטורים עצמיים. עבור 0

$$A=\begin{pmatrix}14&-57&-99\\-9&34&61\\7&-27&-48\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+S_2\to S_2]{S_1-2S_3\to S_1}\begin{pmatrix}0&-3&-3\\-2&7&13\\7&-27&-48\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+3S_2\to S_3]{-S_1/3\to S_1}\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&7&13\\1&-6&-9\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2+2S_3\to S_2}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-5&-5\\1&-6&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&1\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

נמצא וקטורים עצמיים. עבור 1

$$A-I=\begin{pmatrix}13 & -57 & -99\\ -9 & 33 & 61\\ 7 & -27 & -49\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-2S_3\to S_1}\begin{pmatrix}-1 & -3 & -1\\ -9 & 33 & 61\\ 7 & -27 & -49\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+7S_1\to S_3]{S_2-9S_1\to S_2}\begin{pmatrix}-1 & -3 & -1\\ 0 & 60 & 70\\ 0 & -48 & -56\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -3 & -1\\ 0 & 6 & 7\end{pmatrix}v=\begin{pmatrix}-15\\ 7\\ -6\end{pmatrix}$$

נמצא וקטורים עצמיים. עבור מינוס 1

$$A+I=\begin{pmatrix}15 & -57 & -99\\ -9 & 35 & 61\\ 7 & -27 & -47\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-2S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1 & -3 & -5\\ -9 & 35 & 61\\ 7 & -27 & -47\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-7S_1\to S_3]{S_2+9S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1 & -3 & -5\\ 0 & 8 & 16\\ 0 & -6 & -12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & -5\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}v=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

ואכן עבור $P=\begin{pmatrix}-15 & 1 & -3\\ 7 & 2 & 1\\ -6 & -1 & -1\end{pmatrix}$ נקבל

$$\left(\begin{matrix}-15 & 1 & -3\\ 7 & 2 & 1\\ -6 & -1 & -1\end{matrix}\quad I_3\right)\xrightarrow[S_2+S_3\to S_2]{S_1-3S_3\to S_1}\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 1 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ -6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+S_2\to S_3]{S_1-4S_2\to S_1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -7\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ -5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3-5S_1\to S_3]{S_2+S_1\to S_2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -7\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -6\\ 0 & 0 & -1 & -5 & 21 & 37\end{pmatrix}$$

ואכן נקבל $\begin{pmatrix}-15 & 1 & -3\\ 7 & 2 & 1\\ -6 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 7\\ 1 & -3 & -6\\ 5 & -21 & -37\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ונקבל

$$\begin{pmatrix}-1 & 4 & 7\\ 1 & -3 & -6\\ 5 & -21 & -37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14 & -57 & -99\\ -9 & 34 & 61\\ 7 & -27 & -48\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 1 & -3\\ 7 & 2 & 1\\ -6 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 7\\ -1 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15 & 1 & -3\\ 7 & 2 & 1\\ -6 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

סעיף ב נובע כי עבור n זוגי

$$\begin{pmatrix}-23 & 3 & 3\\ -40 & 6 & 5\\ -144 & 18 & 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 5\\ 5 & 11 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 5\\ 5 & 11 & 18\end{pmatrix}^{-1}=P\Lambda P^{-1}\to A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^n P^{-1}=P\Lambda P^{-1}=A$$

סעיף ג נובע כי

$$A=P\Lambda P^{-1}\to A^t=(P\Lambda P^{-1})^t=(P^{-1})^t\Lambda^t P^t=(P^t)^{-1}\Lambda P^t$$

כיון שP הפיכה כך גם המוחלפת שלה, וכיון ש Λ אלכסונית, היא שווה למוחלפת של עצמה ולכן B לכסינה. לכן גם כאן, כל חזקה איזוגית של B שווה לB עצמה.

תשובה 3

עבור $P=\begin{pmatrix}1&4&5\\3&13&16\\2&9&12\end{pmatrix}$ נקבל

$$\begin{pmatrix}1&4&5&\\3&13&16&I_3\\2&9&12&\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-2S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&4&5&1&0&0\\0&1&1&-3&1&0\\0&1&2&-2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1-4S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&1&13&-4&0\\0&1&1&-3&1&0\\0&0&1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-S_3\to S_2]{S_1-S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&12&-3&-1\\0&1&0&-4&2&-1\\0&0&1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

ואכן נקבל $\begin{pmatrix}1&4&5\\3&13&16\\2&9&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12&-3&-1\\-4&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

A מגדירה ה"ל L בבסיס הסטנדרטי E כך ש $A=[L]_E^E$ וכך $[L]_B^B=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ונקבל

$$A=[L]_E^E=[L]_B^E[L]_B^B[L]_E^B=P\begin{pmatrix}3&0&0\\1&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&4&5\\3&13&16\\2&9&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\1&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12&-3&-1\\-4&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7&12&0\\22&39&0\\15&27&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12&-3&-1\\-4&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36&3&-19\\108&12&-61\\72&9&-42\end{pmatrix}.$$

ואכן $A\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\22\\15\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\13\\9\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}4\\13\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\39\\27\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}4\\13\\9\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}5\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

תשובה 4

$$U=Sp\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\},V=Sp\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\},$$

$$U=Sp\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\}\to\begin{pmatrix}1&3&x\\1&2&y\\1&1&z\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&x\\0&-1&y-x\\0&-2&z-x\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&x\\0&-1&y-x\\0&0&z-x-2y+2x\end{pmatrix}\to x+z-2y=0$$

ואכן קל לבדוק כי שני הוקטורים מקימים את המשואה הזו.

$$V=Sp\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\}\to\begin{pmatrix}1&2&x\\-1&1&y\\1&4&z\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2+S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&x\\0&3&y+x\\0&2&z-x\end{pmatrix}\xrightarrow{3S_3-2S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&x\\0&3&y+x\\0&0&3(z-x)-2(y+x)\end{pmatrix}\to 3z-5x-2y=0$$

ואכן קל לבדוק כי שני הוקטורים מקימים את המשואה הזו.

לכן בחתוך נקבל:

$$x+z-2y=0,3z-5x-2y=0\begin{pmatrix}1&-2&1\\-5&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-12&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

בסיס של U יכול להיות {(1,2,3),(1,1,1)}. בסיס של V יכול להבחר {(1,2,2),(1,-1,1)}.

אחודם הוא בסיס של $\mathbb{R}^3$=U+V.

תשובה 5

$$A=\left\{a_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

לפי ההגדרה $b_1 = \frac{a_1}{(a_1,a_1)^{0.5}} = \frac{1}{(4+1)^{0.5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ שוב לפי ההגדרה

$$c_2 = a_2 - \frac{(a_2,a_1)}{(a_1,a_1)}a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{2+3}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, b_2 = \frac{c_2}{(c_2,c_2)^{0.5}} = \frac{1}{\sqrt{9}}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

ולפי ההגדרה

$$c_3 = a_3 - \frac{(a_3,c_1)}{(c_1,c_1)}c_1 - \frac{(a_3,c_2)}{(c_2,c_2)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{2+0+0}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1+0+0}{9}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{45}[\begin{pmatrix}45\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}36\\0\\18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\10\\10\end{pmatrix}] = \frac{1}{45}\begin{pmatrix}14\\10\\-28\end{pmatrix}$$

ולבסוף . $, b_3 = \frac{c_3}{(c_3,c_3)^{0.5}} = \frac{1}{\sqrt{196+100+784}}\begin{pmatrix}14\\10\\-28\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1080}}\begin{pmatrix}14\\10\\-28\end{pmatrix}$

תשובה 6

לא ולהלן דוגמא.

$$V = \mathbb{R}^3, U = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\right\}, W = U = \left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\right\}, A = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, B = A = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

תשובה 7.

לא ולהלן דוגמאת W=U.

תשובה 8

יחס הדמיון שומר על דטרמיננט כיון ש $\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P)^{-1} = \det(A)$

ולכן כיון שA לכסינה יש לה אותו דטרמיננט של מטריצה אלכסונית, והוא שוה

למכפלת האיברים על האלכסון, אשר שונה מ-0 רק אם כל הע"ע הם שונים מ-0. לכן התשובה היא לא.

תשובה 9

כן, כל מרחב לינארי בעל ממד סופי מעל שדה סופי.

תשובה 10

לא, לכל אחד מהמטריצות $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ יש בסיס (שונה) של ו"ע, אבל אין בסיס של ו"ע למטריצת הסכום.