

מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר סתו התשע"ה מועד ג, יום ב, כט איר התשע"ה 18-5-2015

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבוניס
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות שה"כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. שה"כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- $60+20+20=100$

בהצלחה.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו חמש \mathbb{Z}_5 .

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} x + 3y + (3b - 1)z = 5b \\ 2x + 7y + z = -b \\ 4x + (6b + 1)y + 11z = 18 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 10 & i = j \\ 2 & i = 2k - 1, j = 2k, k \in N \\ 3 & i = 2k - 1, j = 2k - 2, k \in N \\ 0 & (i \neq 2k - 1) \vee [(i = 2k - 1) \wedge (1 < |i - j|)] \end{cases}$$

א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4,5,6$.

ב. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך

וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.

ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .

ד. פתור את המשוואה $Av=0$.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+i)x + (2+i)y + (3+i)z = 1 \\ (4+i)x - (3-i)z = 2 \\ (6+i)x + (2-i)z = 3 \end{array} \right.$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

שאלה 5 (10 נקודות)

א. חשב את $\frac{(1-\sqrt{3}i)^{100}}{(1+i)^{200}}$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3×3 ונתון כי $a_{1,1} = 1, a_{1,2} = 2, a_{1,3} = 3$ ונתון

$$A^* = \begin{pmatrix} x & -5 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

מצא את איברי A . A^* כוללת סימנים אך איננה כוללת שחלוף (כלומר חסר התהליך של A^T).

שאלה 7 (10 נקודות)

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא
נתונה מטריצה $A_{6,6}$:

נגדיר מטריצה $B_{6,6}$ על ידי $B_{k,j} = kA_{7-k,7-j}$.

- א. כתוב את איברי B כפונקציה של איברי A .
ב. כתוב את $\det(B)$ כפונקציה של $\det(A)$

חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון. כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונה מטריצה הפיכה A , אז ההצגה שלה כמכפלת מטריצות יסודיות היא יחידה.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית בעלת מטריצה צמודה A^* . אז המטריצה הצמודה של מינוס A היא מינוס המטריצה הצמודה של A .

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A ויש בה שני אלכסונים זהים. אז A איננה הפיכה.

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A שאיבריה שלמים ונביט על המטריצה B המתקבלת ממנה על ידי זה שכל איבר שלם מוחלף במחלקה שלו מודולו 2 . נתון ש B היא הפיכה. אז גם A הפיכה.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)
הוכח את משפט 5 הנקודות.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות
תשובה 1

580242451 עמותה רשומה

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_2 - 2S_1 \rightarrow S_2 \\ S_3 - 3S_1 \rightarrow S_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_1 - 2S_3 \rightarrow S_1 \\ S_2 - 6S_3 \rightarrow S_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_1 - 6S_2 \rightarrow S_1 \\ S_3 - 5S_2 \rightarrow S_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -8 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -8 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4S_2 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_1 - 2S_2 \rightarrow S_1 \\ S_3 + 7S_2 \rightarrow S_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 28 & 29 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

נעבור למערכת משוואות מטריציאלית ונבצע פעולות אלמנטריות :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 2 & 7 & 1 & -b \\ 4 & 6b+1 & 11 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_2-2S_1 \rightarrow S_2 \\ S_3-4S_1 \rightarrow S_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 0 & 1 & 3-6b & -11b \\ 0 & 6b-11 & 15-12b & 18-20b \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-(6b-11)S_2 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3b-1 & 5b \\ 0 & 1 & 3-6b & -11b \\ 0 & 0 & A & B \end{pmatrix}$$

כאשר :

$$\begin{aligned} A &= 15 - 12b - [(3 - 6b)(6b - 11)] = 3(5 - 4b) - 3[(1 - 2b)(6b - 11)] = \\ &= 3[5 - 4b - (6b - 11 - 12b^2 + 22b)] = 3[16 - 32b + 12b^2] = \\ &12[4 - 8b + 3b^2] = 12(b - 2)(3b - 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 18 - 20b + 11b(6b - 11) = 18 - 20b + 66b^2 - 121b = \\ &= 66b^2 - 141b + 18 = 3(22b^2 - 47b + 6) = 3(b - 2)(22b - 3) \end{aligned}$$

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא
אם $b=2$ או $A=B=0$ ואז יש אינסוף פתרונות. אם $b=2/3$ או $A=0 \neq B$
ואז אין פתרונות.

תשובה 3

נשים לב כי

$$A_6 = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_n) = 10^n \text{ ולכן } \det(A_n) = 10 \det(A_{n-1})$$

ה. כיון שלכל n הדטרמיננט שונה מ-0 אז וקטור ה-0 הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי שורה עליונה ונקבל:

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{aligned}\det(A) &= -(2+i)[(4+i)(2-i) + (3-i)(6+i)] = \\ &= -(2+i)[(8+6i-1) - (6-3i+1)] = -(2+i)9i.\end{aligned}$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה A_x , ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה השמאלית ושוב נקבל:

$$\begin{aligned}\det(A_x) &= -(2+i)[2(2-i) + 3(3+i)] = \\ &= -(2+i)(13+i).\end{aligned}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-(2+i)(13+i)}{-(2+i)9i} = \frac{1-13i}{9}.$$

כדרוש.

תשובה 5 סעיף א

נציג מונה ומכנה בצורה קטבית.

580242451 עמותה רשומה

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{100}}{(1 + i)^{200}}$$

$$1 - i\sqrt{3} : R^2 = 1 + 3 = 4, R = 2, \tan(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}, \theta = 120^\circ.$$

$$\begin{aligned} z &= 2 \operatorname{cis}(120^\circ) = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{360^\circ}{3}\right), z^{100} = 2^{100} \operatorname{cis}\left(\frac{360^\circ}{3} \cdot 100\right) = \\ &= 2^{100} \operatorname{cis}\left(360^\circ \left(33 + \frac{1}{3}\right)\right) = 2^{100} \operatorname{cis}(120^\circ) \end{aligned}$$

$$1 + i : R^2 = 1 + 1 = 2, R = \sqrt{2}, \tan(\theta) = \frac{1}{1} = 1, \theta = 45^\circ.$$

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2} \operatorname{cis}(45^\circ) = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{360^\circ}{8}\right), w^{200} = 2^{200/2} \operatorname{cis}\left(\frac{360^\circ}{8} \cdot 200\right) = \\ &= 2^{100} \operatorname{cis}(360^\circ (25)) = 2^{100} \operatorname{cis}(0^\circ). \end{aligned}$$

$$\frac{z^{100}}{w^{200}} = \frac{2^{100} (\operatorname{cis}(120^\circ))}{2^{100} (\operatorname{cis}(0^\circ))} = \operatorname{cis}(120^\circ) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

סעיף ב

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c & d + 2e + 3f \\ 4b + 5c & 4e + 5f \\ 8b + 9c & 8e + 9f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + 3d \\ b & 2b + 3e \\ c & 2c + 3f \end{pmatrix}$$

מהשוואת המטריצות נקבל 6 משוואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות (1,1),(2,1),(3,1) נקבל את 3 המשוואות:

$$a + 2b + 3c = a \rightarrow 2b + 3c = 0$$

$$4b + 5c = b \rightarrow 3b + 6c = 0$$

$$8b + 9c = c \rightarrow 8b + 8c = 0$$

מהמקומות (2,2),(3,2) ומהצבת $b=c=0$ נקבל את 2 המשוואות:

$$4e + 5f = 2b + 3e = 3e \rightarrow e + 5f = 0$$

$$8e + 9f = 2c + 3f = 3f \rightarrow 8e + 6f = 0$$

ופתרון הוא $e=f=0$. נציב במשוואה של המקום (2,1) ונקבל:

$$2a + 3d = d + 2e + 3f = d \rightarrow 2a + 2d = 0$$

ולסכום, המטריצות הן מהצורה:

$$\begin{pmatrix} -d & d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

נשתמש בנתונים ונקבל משוואות

$$c - 3a = 2 \rightarrow c = 3a - 2$$

$$b - 2a = -1 \rightarrow b = 2a - 1$$

$$z - 3x = 1 \rightarrow z = 3x + 1$$

$$y - 2x = 0 \rightarrow y = 2x$$

$$ay - bx = 1 \rightarrow$$

$$a(2x) - (2a - 1)x = x = 1 \rightarrow y = 2, z = 4$$

$$az - cx = 5 \rightarrow$$

$$a4 - 1(3a - 2) = a + 2 = 5 \rightarrow a = 3 \rightarrow b = 5, c = 7$$

כדרוש.

תשובה 7

$$B = \begin{pmatrix} 6a_{6,6} & 6a_{6,5} & 6a_{6,4} & 6a_{6,3} & 6a_{6,2} & 6a_{6,1} \\ 5a_{5,6} & 5a_{5,5} & 5a_{5,4} & 5a_{5,3} & 5a_{5,2} & 5a_{5,1} \\ 4a_{4,6} & 4a_{4,5} & 4a_{4,4} & 4a_{4,3} & 4a_{4,2} & 4a_{4,1} \\ 3a_{3,6} & 3a_{3,5} & 3a_{3,4} & 3a_{3,3} & 3a_{3,2} & 3a_{3,1} \\ 2a_{2,6} & 2a_{2,5} & 2a_{2,4} & 2a_{2,3} & 2a_{2,2} & 2a_{2,1} \\ a_{1,6} & a_{1,5} & a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 6! \det(C),$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{6,6} & a_{6,5} & a_{6,4} & a_{6,3} & a_{6,2} & a_{6,1} \\ a_{5,6} & a_{5,5} & a_{5,4} & a_{5,3} & a_{5,2} & a_{5,1} \\ a_{4,6} & a_{4,5} & a_{4,4} & a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \\ a_{3,6} & a_{3,5} & a_{3,4} & a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{2,6} & a_{2,5} & a_{2,4} & a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,6} & a_{1,5} & a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

אם נחליף עמודה i עם עמודה $n+1-i$ נקבל מטריצה שיותר דומה ל A , ואם במטריצה המתקבלת נחליף שורה i עם שורה $n+1-i$ נקבל את המטריצה A , החלפת עמודות או שורות כופלת דטרמיננט ב -1 , ולכן כיון שיש סך הכל 6 החלפות נקבל כי $\det(C) = \det(A)$, ולכן $\det(B) = 6! \det(A)$.

תשובה 8

התשובה לא נכון ו $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 11 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ממחישה את העובדה.

תשובה 9

לא, אם A היא מטריצה 2×2 אז עבור $-A$ נקבל אותה צמודה כמו של A .

תשובה 10

לא, מספיקה דוגמא נגדית למשל המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא בעלת אלכסונים זהים ועדיין היא הפיכה.

התשובה כן נכון. השוויון $AA^* = \det(A)I_n$ גורר כי השוויון $\det(A)\det(A^*) = (\det(A))^n$ והעובדה שיש שתי שורות מתיחסות גוררת כי $\det(A^*)=0$ ולכן $\det(A)^{n-1}=0$ ולכן $\det(A)=0$.

תשובה 11

התשובה נכון: הדטרמיננטה של B הוא תוצאת מודולו 2 של הדטרמיננטה של A, ואם של B שונה מ-0 אז גם של A שונה מ-0.