המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן אמצע באלגברה לינארית ב למדעי המחשב כתת הנדסאים

יום ב, ז טבת התשע"ב 2-1-2012

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעה
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה במחברת.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

שאלה 1(33 נקודות):

בדק במחברתך האם W הוא תת מרחב של V.

$F=R, V=R[x], W=\{f, f'(2)=0\}$

תזכורת $V=R[x]$ הוא אסף הפולינומים מעל R, W הוא תת מרחב הפולינומים אשר נגזרתן מתאפסת בנקודה x=2.

שאלה 2(33 נקודות):

נתונים האיברים הבאים ב-R[x], חוג הפולינומים עם מקדמים ב-R מצא בסיסים ל:

Sp{p,q},Sp{r,s},Sp{p,q}∩Sp{r,s}, Sp{p,q}+Sp{r,s}, כאשר

$F=\mathbb{R}, V=\mathbb{R}[x],\ p=-1+2x+2x^2+x^3, q=-3+2x+x^2+2x^3, r=1+2x+3x^2+4x^3, s=1+2x+3x^2.$

שאלה 3(33 נקודות):

הצג את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$

ככמכפלה A=BC כאשר C היא בצורת המדרגות הקנונית של A ומספר השורות של C הוא כדרגת A.

תשובות

תשובה 1

W אינה ריקה כי היא כוללת את פולינום ה-0, ומספיק שנבדק את התנאי המשוגע. ואכן אם f'(2)=g'(2)=0 אז נובע כי (af+bg)'(2)=af'(2)+bg'(2)=a0+b0=0

תשובה2

כל פולינום עם מקדמים ממשיים ממעלה 3 ניתן להציג כוקטור של R^4 ולכן הבעיה הופכת להיות כמו בעיות של שנים שעברו

2-א- המטריצה אותה יש לדרג היא $\begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ 2 & 2 & b \\ 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{pmatrix}$. נקבל

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ 2 & 2 & b \\ 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+S_1\to S_4]{S_2+2S_1\to S_2, S_3+2S_1\to S_3} \begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ 0 & -4 & b+2a \\ 0 & -5 & c+2a \\ 0 & -1 & d+a \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-5S_4\to S_3]{S_2-4S_4\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ 0 & 0 & b+2a-4d-4a \\ 0 & 0 & c+2a-5d-5a \\ 0 & -1 & d+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & a \\ 0 & 0 & b-2a-4d \\ 0 & 0 & c-3a-5d \\ 0 & -1 & d+a \end{pmatrix}$$

.

לכן Sp{p,q} הוא אוסף הפולינומים $a+bx+cx^2+dx^3$ המקיימים b=2a+4d,c=3a+5d : קל לראות כי הפולינומים p,q מקימים משואות אלו. בצורה דומה נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3 & c \\ 0 & 4 & d \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_3\to S_3]{S_2-2S_1\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & c-3a \\ 0 & 4 & d \end{pmatrix}$$

לכן $Sp\{r,s\}$ הוא אוסף הפולינומים $a+bx+cx^2+dx^3$ המקיימים b=2a,c=3a : קל לראות כי הפולינומים r,s מקימים משוואות אלו.

כך נקבל את המשוואות המאפינות את $Sp\{p,q\}\cap Sp\{r,s\}$ ואת פתרונן :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to t = 1+2x+3x^2$$

לכן בסיס של מרחב החתוך הוא הפולינום t. כיון שq,pw אינם מתיחסים הם בת"ל ולכן ממד המרחב שהם פורשים הוא 2, ולכן {p,t} הוא בסיס של Sp(p,q), כיון שs,rw אינם מתיחסים הם בת"ל ולכן ממד המרחב שהם פורשים הוא 2, ולכן {t,r} הוא בסיס של Sp(r,s) ולכן לפי הוכחת משפט ההכלה וההדחה {t,p,r} הוא בסיס של Sp(p,q)+Sp(r,s).

<u>תשובה3</u>

נבצע פעולות אלמנטריות כרגיל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-13S_1\to S_4]{S_2-5S_1\to S_2,\,S_3-9S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-3S_2\to S_4]{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2/(-4)\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-2S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נכפל את המטריצות האלמנטריות ההפוכות בסדר הפוך :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 0 \\ 13 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 1 & 0 \\ 13 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכעת נבדק את ההצגה הרצויה,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

כדרוש.