<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 30.08.2007
סמסטר ב׳, מועד א׳.תשס״ז.
המרצה: פרופ׳ מיכאל מוזיצ׳וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

חלק א׳. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על שלוש מהשאלות הבאות שסכום הנקודות שלהן שווה ל-50. ניתן להשתמש באופן חופשי בכל טענה שהוכחה בהרצאה כל עוד היא מצוטטת במדויק.

1. 15 **נקודות.**

תהיינה $U=\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid A=A^T\}$ ו $W=\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid A=-A^T\}$.

א. הוכח ש U,W תת-מרחבים של $M_n(\mathbf{R})$.

ב. הוכח ש $M_n(\mathbf{R})$ הוא סכום ישר של U ו W.

<u>נוכיח ש-$U\le M_n(\mathbf{R})$.</u>

א. $0^T=0\Rightarrow 0\in U$

ב. סגירות כלפי חיבור:

$$A,B\in U\Rightarrow \left.\begin{matrix}A^T=A\\ B^T=B\end{matrix}\right\}\Rightarrow (A+B)^T=A^T+B^T=A+B\Rightarrow A+B\in U$$

ג. סגירות כלפי כפל בסקלר

ניקח $A\in U$. אז $A=A^T$ ולכל סקלר ממשי α מתקיים

$(\alpha A)^T=\alpha A^T=\alpha A\Rightarrow \alpha A\in U$.

<u>נוכיח ש-$W\le M_n(\mathbf{R})$.</u>

א. $0^T=0\Rightarrow 0\in W$.

ב. סגירות כלפי חיבור:

$$A,B\in W\Rightarrow \left.\begin{matrix}A^T=-A\\ B^T=-B\end{matrix}\right\}\Rightarrow (A+B)^T=A^T+B^T=-A-B\Rightarrow A+B\in W$$

ג. סגירות כלפי כפל בסקלר

ניקח $A\in W$. אז $A^T=-A$ ולכל סקלר ממשי α מתקיים

$(\alpha A)^T=\alpha A^T=-\alpha A\Rightarrow \alpha A\in W$.

<u>נוכיח ש-$U\cap W=\{0\}$.</u>

אם $A\in U\cap W$ אז $A^T=A$ וגם $A^T=-A$. לכן $A=-A$. מכוון ש-A מטריצה ממשית אנו מקבלים $A=0$.

נוכיח ש- $U+W=M_n(\mathbf{R})$

ניקח $A\in M_n(\mathbf{R})$. אז $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$.

המטריצה $\frac{1}{2}(A+A^T)$ מקיימת

$$\left(\tfrac{1}{2}(A+A^T)\right)^T=\tfrac{1}{2}(A^T+(A^T)^T)=\tfrac{1}{2}(A+A^T),$$

לכן $\frac{1}{2}(A+A^T)\in U$.

המטריצה $\frac{1}{2}(A-A^T)$ מקיימת

$$\left(\tfrac{1}{2}(A-A^T)\right)^T=\tfrac{1}{2}(A^T-(A^T)^T)=\tfrac{1}{2}(A^T-A)=-\tfrac{1}{2}(A-A^T),$$

לכן $\frac{1}{2}(A-A^T)\in W$.

2. 15 נקודות.

תהי B קבוצת וקטורים של מרחב וקטורי V המוגדר מעל שדה F.

א. הוכח ש- B בסיס של V אם ורק אם לכל $\bar{v}\in V$ למשוואה

$$x_1\bar{b}_1+\ldots+x_n\bar{b}_n=\bar{v} \quad (1)$$

יש פתרון יחיד.

ב. הוכח שאם $B=\{\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n\}$ בסיס אז הפונקציה $\bar{v}\to[\bar{v}]_B$ היא העתקה ליניארית.

חלק א׳

נוכיח קודם את הגרירה: B בסיס $\Leftarrow$ קיום ויחידות הפתרון של (1).

קיום פתרון של (1). $Sp(B)=V$, לכן כל וקטור $\bar{v}\in V$ הינו צירוף ליניארי של אברי הבסיס, כלומר קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ כך ש- $\alpha_1\bar{b}_1+\ldots+\alpha_n\bar{b}_n=\bar{v}$.

יחידות הפתרון של (1).

נניח שיש שני פתרונות, כלומר קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ ו $\beta_1,\ldots,\beta_n\in F$ כך ש- $\alpha_1\bar{b}_1+\ldots+\alpha_n\bar{b}_n=\bar{v}$ ו $\beta_1\bar{b}_1+\ldots+\beta_n\bar{b}_n=\bar{v}$. נחסיר שוויון אחד מהשני: $(\alpha_1-\beta_1)\bar{b}_1+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\bar{b}_n=\bar{0}$. הוקטורים $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$ בת״ל, לכן $(\alpha_1-\beta_1)=0,\ldots,(\alpha_n-\beta_n)=0$.

עכשיו, נוכיח את הגרירה: קיום ויחידות הפתרון של (1) $\Leftarrow$ B בסיס.

מקיום הפתרון נובע שכל וקטור $\bar{v}\in V$ שייך ל- $Sp(B)$. לכן $Sp(B)=V$.

מיחידות הפתרון נובע ש- $x_1=0,\ldots,x_n=0$ הוא פתרון יחיד של המשוואה $x_1\bar{b}_1+\ldots+x_n\bar{b}_n=\bar{0}$. לכן B בת״ל.

חלק ב׳.

נוכיח קודם שהשוויון $[\bar{u}+\bar{v}]_B=[\bar{u}]_B+[\bar{v}]_B$ מתקיים לכל $\bar{u},\bar{v}\in V$.

נסמן את הקואורדינאטות של הוקטורים $\bar{u},\bar{v}$ כ- $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ו $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, כלומר $[\bar{u}]_B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ו $[\bar{v}]_B=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. אז

$$\left.\begin{aligned}\beta_1\bar{b}_1+\ldots+\beta_n\bar{b}_n&=\bar{v}\\ \alpha_1\bar{b}_1+\ldots+\alpha_n\bar{b}_n&=\bar{u}\end{aligned}\right\}\Rightarrow(\alpha_1\bar{b}_1+\ldots+\alpha_n\bar{b}_n)+(\beta_1\bar{b}_1+\ldots+\beta_n\bar{b}_n)=\bar{u}+\bar{v}$$

$$\Rightarrow(\alpha_1+\beta_1)\bar{b}_1+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)\bar{b}_n=\bar{u}+\bar{v}\Rightarrow[\bar{u}+\bar{v}]_B=\big((\alpha_1+\beta_1),\ldots,(\alpha_n+\beta_n)\big)=$$
$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\ldots,\beta_n)=[\bar{u}]_B+[\bar{v}]_B$$

הוכחנו ש- $[\bar{u}+\bar{v}]_B=[\bar{u}]_B+[\bar{v}]_B$.

נוכיח עכשיו ש- $[\alpha\bar{v}]_B=\alpha[\bar{v}]_B$ מתקיים לכל וקטור $\bar{v}\in V$ ולכל סקלר $\alpha\in F$.
נסמן את הקואורדינאטות של הוקטור $\bar{v}$ כ- $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. אז

$$\alpha_1\bar{b}_1+\ldots+\alpha_n\bar{b}_n=\bar{v}\Rightarrow\alpha(\alpha_1\bar{b}_1+\ldots+\alpha_n\bar{b}_n)=\alpha\bar{v}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\alpha\alpha_1)\bar{b}_1+\ldots+(\alpha\alpha_n)\bar{b}_n=\alpha\bar{v}\Rightarrow[\alpha\bar{v}]_B=(\alpha\alpha_1,\ldots,\alpha\alpha_n)=\alpha(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\alpha[\bar{v}]_B$$

3. 15 נקודות.

יהי $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$ בסיס כלשהו של מרחב וקטורי V המוגדר מעל שדה F. יהיו $\phi_1,\ldots,\phi_n\in V^*$ הפונקציונאלים הליניאריים כך ש-

$$\phi_i(\bar{b}_j)=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$$

הוכח ש- $\phi_1,\ldots,\phi_n$ בסיס של V^*.

זהו משפט 11.1 מהספר "אלגברה ליניארית" של סימור ליפשיץ (מהדורה ראשונה).
ההוכחה שלו ניתן לקרוא בעמוד 293.

4. 20 נקודות.

א. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $A\subseteq V$ קבוצה סופית, לא ריקה, של וקטורים. הוכח שאם A ת"ל אז קיימת תת-קבוצה <u>ממש</u> שלה $B\subset A$ כך ש $Sp(A)=Sp(B)$.

ב. הוכיחו שבכל מרחב וקטורי נפרש סופית קיים בסיס.

א. בהוכחה של חלק זה נשתמש בטענת עזר:

בכל קבוצה ת"ל S קיים וקטור $\bar{s}\in S$ כך ש- $\bar{s}\in Sp(S-\{\bar{s}\})$.

לפי טענת עזר קיים $\bar{a}\in A$ כך ש- $\bar{a}\in Sp(A-\{\bar{a}\})$. נוכיח שהקבוצה $B:=A-\{\bar{a}\}$ מקיימת את חלק א', כלומר, $Sp(A)=Sp(A-\{\bar{a}\})$.

מההכלה $A-\{\bar{a}\}\subseteq A$ נובע ש- $Sp(A-\{\bar{a}\})\leq Sp(A)$,
מהשייכות $\bar{a}\in Sp(A-\{\bar{a}\})$ וההכלה $A-\{\bar{a}\}\subseteq Sp(A-\{\bar{a}\})$ נובע ש: $A\subseteq Sp(A-\{\bar{a}\})$. לכן $Sp(A)\leq Sp(A-\{\bar{a}\})$, יחד עם האי-שוויון $Sp(A-\{\bar{a}\})\leq Sp(A)$ נקבל $Sp(A-\{\bar{a}\})=Sp(A)$.

הערה: בחלק א' אין צורך בהוכחה אינדוקטיבית.

ב. אם מ"ו V נפרש סופית אז קיימת קבוצה סופית של וקטורים $S\subseteq V$ כך ש- $Sp(S)=V$.

כדי להוכיח את הטענה מספיק להוכיח שבכל קבוצה סופית S קיימת תת-קבוצה בת"ל T כך ש- $Sp(T)=Sp(S)$. ההוכחה נעשה באינדוקציה לפי $|S|$.

<u>בדיקה</u>: $|S|=0$. במקרה הזה $S=\varnothing$ ולכן היא בת"ל. ניתן לבחור $T=S$.

<u>צעד האינדוקציה</u>.
נניח שהטענה נכונה עבור כל קבוצה בת $n-1$ או פחות וקטורים. נביט בקבוצה S מגודל n. אם היא בת"ל אז ניתן לבחור $T=S$. אם היא ת"ל, אז לפי חלק א', קיימת תת-קבוצה $R\subseteq S$ כך ש- $|R|<|S|$ ו $Sp(R)=Sp(S)$. לפי הנחת האינדוקציה קיימת תת-קבוצה בת"ל T המוכלת ב- R כך ש- $Sp(T)=Sp(R)$. משוויון $Sp(T)=Sp(R)=Sp(S)$ נובע ש- T היא התת-קבוצה הנדרשת.

5. 20 נקודות.
תהי $L:V\to W$ העתקה ליניארית (V,W מרחבים ממימד סופי). הוכח ש $\dim(\mathrm{Im}(L))+\dim(Ker(L))=\dim(V)$.

נסמן $m:=\dim(\mathrm{Im}(L)),k:=\dim(Ker(L))$. נבחר בסיס כלשהוא, נאמר $A=(\bar{a}_1,...,\bar{a}_m)$ של $\mathrm{Im}(L)$ ו בסיס כלשהוא של $Ker(L)$, נאמר $B=(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k)$. לכל $\bar{w}$ וקטור ששייך ל- $\mathrm{Im}(L)$ קיים $\bar{v}\in V$ כך ש- $L(\bar{v})=\bar{w}$. לכן קיימים וקטורים $\bar{c}_1,...,\bar{c}_m\in V$ כך ש- $L(\bar{c}_1)=\bar{a}_1,...,L(\bar{c}_m)=\bar{a}_m$. נוכיח שהוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{c}_1,...,\bar{c}_m$ מהווים בסיס של V.

<u>שלב א'</u>: הוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{c}_1,...,\bar{c}_m$ בת"ל.
נניח ש- $\beta_1\bar{b}_1+...\beta_k\bar{b}_k+\gamma_1\bar{c}_1+...\gamma_m\bar{c}_m=\bar{0}$. נפעיל L משני הצדדים:

$$L(\beta_1\bar{b}_1+...\beta_k\bar{b}_k+\gamma_1\bar{c}_1+...\gamma_m\bar{c}_m)=L(\bar{0})=\bar{0}\Rightarrow\beta_1L(\bar{b}_1)+...\beta_kL(\bar{b}_k)+\gamma_1L(\bar{c}_1)+...\gamma_mL(\bar{c}_m)=\bar{0}$$
$$\Rightarrow\beta_1\bar{0}+...\beta_k\bar{0}+\gamma_1\bar{a}_1+...\gamma_m\bar{a}_m=\bar{0}\Rightarrow\gamma_1\bar{a}_1+...\gamma_m\bar{a}_m=\bar{0}$$

הוקטורים $\bar{a}_1,...,\bar{a}_m$ בת"ל, לכן מהשוויון $\gamma_1\bar{a}_1+...\gamma_m\bar{a}_m=\bar{0}$ נובע ש- $\gamma_1=0,...,\gamma_m=0$. נציב $\gamma_1=0,...,\gamma_m=0$ בשוויון $\beta_1\bar{b}_1+...\beta_k\bar{b}_k+\gamma_1\bar{c}_1+...\gamma_m\bar{c}_m=\bar{0}$, נקבל $\beta_1\bar{b}_1+...\beta_k\bar{b}_k=\bar{0}$. מאי-תלות של הוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k$ נובע $\beta_1=0,...,\beta_k=0$.

<u>שלב ב'</u> הוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{c}_1,...,\bar{c}_m$ פורשים את V.
נוכיח שכל וקטור $\bar{v}\in V$ הוא צירוף ליניארי של $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{c}_1,...,\bar{c}_m$. מכיוון ש- $L(\bar{v})\in\mathrm{Im}(L)$ ו $A=(\bar{a}_1,...,\bar{a}_m)$ בסיס של $\mathrm{Im}(L)$ קיימים סקלרים $\alpha_1,...,\alpha_m\in F$ כך ש- $L(\bar{v})=\alpha_1\bar{a}_1+...+\alpha_m\bar{a}_m=\alpha_1L(\bar{c}_1)+...+\alpha_mL(\bar{c}_m)$. מכאן נובע ש- $L(\bar{v}-\alpha_1\bar{c}_1-...-\alpha_m\bar{c}_m)=\bar{0}\Rightarrow\bar{v}-\alpha_1\bar{c}_1-...-\alpha_m\bar{c}_m\in Ker(L)$. מכיוון ש- $B=(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k)$ בסיס של $Ker(L)$ קיימים סקלרים $\beta_1,...,\beta_k$ כך ש- $\bar{v}-\alpha_1\bar{c}_1-...-\alpha_m\bar{c}_m=\beta_1\bar{b}_1+...+\beta_k\bar{b}_k$. מכאן נובע ש- $\bar{v}$ צירוף ליניארי של $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{c}_1,...,\bar{c}_m$.

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על כל השאלות. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

6. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $Ker(A)$ ו $R(A)$ כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&0&1&0\\2&2&1&1\\0&2&2&1\end{pmatrix}\in M_4(\mathbf{Z}_3)\ .$$

נדרג את המטריה, נקבל : $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. פעולות שורה לא משנות את מרחב השורות, לכן $R(A)=R(B)=Sp((1,0,1,0),(0,1,1,2))$. גם גרעין המטריצה לא משתנה, לכן

$$Ker(A)=Ker(B)=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbf{Z}_3^4 \;\middle|\; \begin{cases}x+z=0\\ y+z+2w=0\end{cases}\right\}=$$

$$\{(-z,-z-2w,z,w)\mid z,w\in\mathbf{Z}_3\}=Sp((-1,-1,1,0),(0,-2,0,1))\ .$$

<u>סכום של $Ker(A)$ ו $R(A)$.</u>

נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\\1&1\\0&2\end{matrix}}_{\text{basis of } R(A)} & \underbrace{\begin{matrix}-1&0\\-1&-2\\1&0\\0&1\end{matrix}}_{\text{basis of } Ker(A)}\end{pmatrix}$. נקבל מטריצת-יחידה מסדר 4. לכן הוקטורים $(1,0,1,0),(0,1,1,2),(-1,-1,1,0),(0,-2,0,1)$ בת"ל ומהווים בסיס של $Ker(A)+R(A)$. מכיוון ש- $\dim(Ker(A)+R(A))=4=\dim(\mathbf{Z}_3^4)$ מקבלים $Ker(A)+R(A)=\dim(\mathbf{Z}_3^4)$.

<u>סכום של $Ker(A)$ ו $R(A)$ (דרך סטנדרטית).</u>

נכתוב כל אחד מהמרחבים $R(A)$ ו $Ker(A)$ כמרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית:

$R(A)$: $\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\1&1&z\\0&2&w\end{pmatrix}$. אחרי הדירוג נקבל $\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z-x-y\\0&0&w-2y\end{pmatrix}$. לכן

$$R(A)=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbf{Z}_3^4 \;\middle|\; \begin{cases}z-x-y=0\\ w-2y=0\end{cases}\right\}\ .$$

$Ker(A)$:

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ -1 & -2 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & w \end{pmatrix}$. אחרי הדירוג נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & \frac{y-x}{-2} \\ 0 & 0 & z+x \\ 0 & 0 & w+\frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$. לכן

$$Ker(A)=\left\{(x,y,z,w)\in \mathbf{Z}_3^4 \,\middle|\, \begin{cases} z+x=0 \\ w+0.5(y-x)=0 \end{cases}\right\}.$$

כדי למצוא את החיתוך יש לאחד שתי מערכות למערכת אחת ולצמוא את מרחב הפתרונות שלה.

$$\begin{cases} z-x-y=0 \\ w-2y=0 \\ z+x=0 \\ w+0.5(y-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

לאחר הדירוג נקבל מטריצת היחידה. לכן למערכת יש פתרון טריביאלי בלבד, כלומר $Ker(A)\cap R(A)=\{\bar{0}\}$. לכן בסיס החיתוך הוא $\varnothing$.

<u>חיתוך של $Ker(A)$ ו $R(A)$ (דרך שנייה, קצרה יותר).</u>

מהנוסחה $\dim(Ker(A)+R(A))=\dim(R(A))+\dim(Ker(A))-\dim(R(A)\cap Ker(A))$

נובע ש- $\dim(R(A)\cap Ker(A))=0$. לכן $R(A)\cap Ker(A)=\{0\}$.

הערה: בשאלות מסוג זה תמיד כדי לבדוק את השוויון $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$. אם הוא לא מתקיים אז יש טעות בחישובים.

7. נתונה מטריצה ממשית

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & a & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי. לכל ערך הפרמטר a מצאו:

א. בסיס למרחב $C(A)$.

ב. בסיס למרחב $Ker(A)$.

נדרג את המטריצה, נקבל $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. אם $a\neq 3$ אז הצורה הקנונית

של A תראה כך $K=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$. מכאן נובע ש-$rank(A)=3$. לכן

$\dim(C(A))=3 \Leftarrow C(A)=\mathbf{R}^3$. לכן כל בסיס $\mathbf{R}^3$ יהיה גם בסיס של $C(A)$.

מהמטריצה K מוצאים גם את הבסיס של $Ker(A)$: $(-2,0,-1,1)$.

אם $a=3$ אז $K=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ לכן $C(A)=Sp(A^1,A^3)=Sp\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right)$ ו

$Ker(A)=\{(-y-2w,y,-w,w)\}=Sp((-1,1,0,0),(-2,0,-1,1))$.

8. נתון בסיס $B=(\overline{b_1}=(a,b,c,0,0),\overline{b_2}=(0,a,b,c,0),\overline{b_3}=(0,0,a,b,c))$ של תת-מרחב $W\le \mathbf{Z}_3^5$. קואורדינאטות של הווקטור $(1,0,2,2,2)\in W$ בבסיס B שוות ל-$(1,1,2)$.

א. מצא את a,b,c.

ב. השלם את בסיס B שמצאת עד בסיס של כל המרחב $\mathbf{Z}_3^5$

א. מהנתון מקבלים

$$1\overline{b_1}+1\overline{b_2}+2\overline{b_3}=(1,0,2,2,2)\Rightarrow(a,b,c,0,0)+(0,a,b,c,0)+2(0,0,a,b,c)=(1,0,2,2,2)$$

$$\Rightarrow(a,b+a,c+b+2a,c+2b,2c)=(1,0,2,2,2)\Rightarrow a=1,b=2,c=1\Rightarrow$$

$$\overline{b_1}=(1,2,1,0,0),\overline{b_2}=(0,1,2,1,0),\overline{b_3}=(0,0,1,2,1)$$

נוסיף לשלושה הוקטורים שקבלנו בסיס כלשהו של $\mathbf{Z}_3^5$, למשל בסיס סטנדרטי.

נכתוב את כולם כעמודות של המטריצה 5×8 :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0&0\\2&1&0&0&1&0&0&0\\1&2&1&0&0&1&0&0\\0&1&2&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

אחרי הדירוג נקבל

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&0&2&0&1&1&0\\0&0&0&0&2&2&0&1\end{pmatrix}$$

מכאן נובע שהוקטורים

$\overline{b_1}=(1,2,1,0,0),\overline{b_2}=(0,1,2,1,0),\overline{b_3}=(0,0,1,2,1),(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)$ מהווים בסיס של $\mathbf{Z}_3^5$.

9. נתונה העתקה ליניארית $L:\mathbf{R}_3[x]\to M_2(\mathbf{R})$ המוגדר ע"י הנוסחה

$L(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) & -p(0) \\ -p(0) & p(1) \end{pmatrix}$.

א. חשב את מטריצתו של L בבסיסים $B=(1,x,x^2,x^3)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ ו

$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ של $M_2(\mathbf{R})$.

ב. מצא בסיסים של $Ker(L)$ ו $\mathrm{Im}(L)$.

א.

$$L(\bar{b}_1)=L(1)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=A_1-A_2-A_3+A_4 \Rightarrow [L(\bar{b}_1)]_A=(1,-1,-1,1),$$

$$L(\bar{b}_2)=L(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A_1+A_4 \Rightarrow [L(\bar{b}_2)]_A=(1,0,0,1),$$

$$L(\bar{b}_3)=L(x^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A_1+A_4 \Rightarrow [L(\bar{b}_3)]_A=(1,0,0,1),$$

$$L(\bar{b}_4)=L(x^3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A_1+A_4 \Rightarrow [L(\bar{b}_4)]_A=(1,0,0,1),$$

מכאן מקבלים את המטריצה:

$${}_A[L]_B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ב. המרחב $\mathrm{Im}(L)$ נפרש ע"י הוקטורים $L(\bar{b}_1),L(\bar{b}_2),L(\bar{b}_3),L(\bar{b}_4)$. לכן .

$\mathrm{Im}(L)=Sp(A_1-A_2-A_3+A_4,A_1+A_4)=Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. המטריצות

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ בת"ל, לכן הן מהוות בסיס של $\mathrm{Im}(L)$.

המרחב $Ker(L)$ מורכב מכל הפולינומים המקיימים $L(p(x))=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. לכן

$p(0)=0, p(1)=0 \Leftrightarrow p(x)\in Ker(L)$. מהשייכות $p(x)\in\mathbf{R}_3[x]$ נובע ש-.

$\boldsymbol{p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x^1+a_0x^0}$. לכן

$$p(1)=0 \Leftrightarrow a_3+a_2+a_1+a_0=0,$$
$$p(0)=0 \Leftrightarrow a_0=0$$

מכאן נובע ש- $p(x)\in Ker(L) \Leftrightarrow p(x)=(-a_2-a_1)x^3+a_2x^2+a_1x^1$ כאשר a_1,a_2 הם פרמטרים ממשיים כלשהם. לכן הפולינומים $-x^3+x^2,-x^3+x^1$ מהווים בסיס של הגרעין.

10.נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.
ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.
ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A.

א. הפולינום האופייני: $|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\1&\lambda-3&1\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. לכן

יש שני ערכים עצמיים: $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

ב+ג. בסיסים של המרחבים העצמיים:

$\lambda=1 \Leftarrow$ $V_1=Ker(1\cdot I_3-A)=Ker\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. אחרי הדירוג של המטריצה

$\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. נקבל $Ker\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=Ker\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow V_1=\{(z,z,z)\}$. לכן

הוקטור $(1,1,1)$ הינו בסיס של V_1.

$\lambda=2 \Leftarrow$ $V_2=Ker(2\cdot I_3-A)=Ker\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$. אחרי הדירוג של המטריצה

$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. נקבל $Ker\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\{(x,y,z)\mid x-y+z=0\}\Rightarrow V_2=\{(y-z,y,z)\}$.

לכן הוקטורים $(1,1,0),(-1,0,1)$ מהווים בסיס של V_2.

קיבלנו ש- $\dim(V_1)+\dim(V_2)=1+2=3$. לכן המטריצה ניתנת ללכסון. המטריצה

המלכסנת $T=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

הערות:
1. אם אחד מהמרחבים העצמיים V_λ יצא מרחב טריביאלי, אז יש טעות בחישובים.
2.מטריצה מלכסנת תמיד מטריצה הפיכה והסדר שלה שווה לסדר של המטריצה המקורית.

בהצלחה !