<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית ב', 20.07.2011
סמסטר א', מועד א'.תשעא.
המרצה: פרופ' מיכאל מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

חלק א'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על שתי שאלות מהשאלות 1-3 ועל שאלה אחת מהשאלות 4-5. ניתן להשתמש באופן חופשי בכל טענה שהוכחה בהרצאה כל עוד היא מצוטטת במדויק.

1. 15 **נקודות.**
יהי $M_n(\mathbf{R})$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר n. תהי U קבוצת כל המטריצות המשולשות-העליונות ו W קבוצה של כל המטריצות הסימטריות, כלומר

$$U = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A_{ij} = 0 \text{ for all } 1 \le j < i \le n\},$$

$$W = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A^T = A\}$$

הוכח ש U,W תת-מרחבים של $M_n(\mathbf{R})$ ומצא את $\dim(U \cap W), \dim(U+W)$.

<u>נוכיח ש- $W \le M_n(\mathbf{R})$.</u>

א. $0^T = 0 \Rightarrow 0 \in W$

ב. סגירות כלפי חיבור:

$$A,B \in W \Rightarrow \left.\begin{matrix} A^T = A \\ B^T = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A + B \in W$$

ג. סגירות כלפי כפל בסקלר
ניקח $A \in W$. אז $A = A^T$ ולכל סקלר ממשי α מתקיים
$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in W$.

<u>נוכיח ש- $U \le M_n(\mathbf{R})$.</u>
נזכיר שמטריצה משולשת עליונה היא מטריצה שכל רכיביה מתחת לאלכסון הראשי שווים לאפס. בשפה פורמאלית $A \in U \Leftrightarrow A_{ij} = 0 \text{ for all } 1 \le j < i \le n$.

א. $0 \in U$ מכוון ש- $0_{ij} = 0$ לכל $1 \le j < i \le n$.

ב. סגירות כלפי חיבור:
אם $A,B \in U$ אז לכל זוג של האינדקסים i,j המקיימים $1 \le j < i \le n$ מתקיים $A_{ij} = 0, B_{ij} = 0$ לכן
$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = 0 \Rightarrow A + B \in U$.

ג. סגירות כלפי כפל בסקלר
ניקח $A \in U$. אז לכל זוג של האינדקסים i,j המקיימים $1 \le j < i \le n$ מתקיים $A_{ij} = 0$. לכן לכל סקלר ממשי α מתקיים
$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha A \in U$.

חישוב של $\dim(U\cap W),\dim(U+W)$.

אם $A\in U\cap W$ אז A גם משולשת עליונה (כלומר $A_{ij}=0$ לכל זוג של האינדקסים i,j המקיימים $1\le j<i\le n$) וגם סימטרית (כלומר $A_{ij}=A_{ji}$ לכל זוג של האינדקסים i,j). לכן A מטריצה אלכסונית. מכאן נובע ש:

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & ... & 0\\ 0 & A_{22} & ... & 0\\ . & . & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & A_{nn}\end{pmatrix}\middle| A_{11},A_{22},...,A_{nn}\in\mathbf{R}\right\}$$

. מכוון שכל מטריצה אלכסונית מוגדרת ע"י n סקלרים בלתי-תלויים $A_{11},A_{22},...,A_{nn}$ אנו מקבלים ש- $\dim(U\cap W)=n$.

מהנוסחה $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$ ושוויונות $\dim(U)=\frac{n(n+1)}{2},\dim(W)=\frac{n(n+1)}{2}$ אנו מקבלים

$$\dim(U+W)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2.$$

2. 15 נקודות.

יהיו V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי, $\bar{b}_1,...,\bar{b}_n$ בסיס כלשהו של V. הוכח ששתי העתקות ליניאריות $L:V\to W$ ו $M:V\to W$ שוות אם ורק אם $L(\bar{b}_1)=M(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n)=M(\bar{b}_n)$.

הוכחת הגרירה $L=M\Rightarrow L(\bar{b}_1)=M(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n)=M(\bar{b}_n)$.

מהשוויון $L=M$ נובע ש- $L(\bar{v})=M(\bar{v})$ מתקיים לכל וקטור $\bar{v}\in V$. לכן $L(\bar{b}_1)=M(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n)=M(\bar{b}_n)$.

הוכחת הגרירה $L=M\Leftarrow L(\bar{b}_1)=M(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n)=M(\bar{b}_n)$.

צריך להוכיח שהשוויון $L(\bar{v})=M(\bar{v})$ מתקיים לכל וקטור $\bar{v}\in V$. כל וקטור $\bar{v}\in V$ ניתן להציג כצירוף ליניארי של אברי הבסיס: $\bar{v}=\beta_1\bar{b}+\beta_2\bar{b}_2+...+\beta_n\bar{b}_n$ כאשר $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\in F$ הן קואורדינאטות של $\bar{v}$ בבסיס $\bar{b}_1,...,\bar{b}_n$. עכשיו

$$L(\bar{v})=L(\beta_1\bar{b}+\beta_2\bar{b}_2+...+\beta_n\bar{b}_n)=\beta_1L(\bar{b})+\beta_2L(\bar{b}_2)+...+\beta_nL(\bar{b}_n)=$$
$$\beta_1M(\bar{b})+\beta_2M(\bar{b}_2)+...+\beta_nM(\bar{b}_n)=M(\beta_1\bar{b}+\beta_2\bar{b}_2+...\beta_n\bar{b}_n)=M(\bar{v})$$

3. 15 נקודות.

יהיו U,V,W שלושה מרחבים כלשהם מעל שדה F . הוכח שאם $L:U\rightarrow V$ ו $M:V\rightarrow W$ העתקות ליניאריות אזי גם הפונקציה $N:U\rightarrow W$ המוגדרת ע"י הנוסחה $N(\bar{u})=M(L(\bar{u}))$ היא העתקה ליניארית. הוכח ש- $Ker(L)\le Ker(N)$ ו $\operatorname{Im}(N)\le\operatorname{Im}(M)$.

<u>הוכחה ש- $N:U\rightarrow W$ העתקה ליניארית.</u>

לכל $\bar{u}_1,\bar{u}_2\in U$ אנו מקבלים

$$N(\bar{u}_1+\bar{u}_2)=M(L(\bar{u}_1+\bar{u}_2))=M(L(\bar{u}_1)+L(\bar{u}_2))=$$
$$M(L(\bar{u}_1))+M(L(\bar{u}_2))=N(\bar{u}_1)+N(\bar{u}_2)$$

לכל $\bar{u}\in U$ ו $\alpha\in F$ אנו מקבלים:

$$N(\alpha\bar{u})=M(L(\alpha\bar{u}))=M(\alpha L(\bar{u}))=\alpha M(L(\bar{u}))=\alpha N(\bar{u}).$$

<u>הוכחה של $Ker(L)\le Ker(N)$.</u>

אם $\bar{u}\in Ker(L)$ אזי $L(\bar{u})=\bar{0}$. מכאן נובע ש:

$$N(\bar{u})=M(L(\bar{u}))=M(\bar{0})=\bar{0}\Rightarrow\bar{u}\in Ker(N).$$

<u>הוכחה של $\operatorname{Im}(N)\le\operatorname{Im}(M)$.</u>

אם $\bar{w}\in\operatorname{Im}(N)$ אז קיים $\bar{u}\in U$ כך ש- $N(\bar{u})=\bar{w}$. מכאן נובע ש:

$$M(L(\bar{u}))=\bar{w}\Rightarrow\bar{w}\in\operatorname{Im}(M)$$

4. 20 נקודות.

תהיינה $A=\{\bar{a}_1,...,\bar{a}_m\},B=\{\bar{b}_1,...,\bar{b}_n\}$ שתי קבוצות בלתי תלויות של וקטורים ממרחב וקטורי V המוגדר מעל שדה F . הוכח שאם $m<n$ אזי קיים וקטור $\bar{b}_i\in B$ כך ש $A\cup\{\bar{b}_i\}$ בת"ל.

נשתמש בטענה הבאה שהוכחה בכיתה:

טענה. אם A,B שתי קבוצות סופיות של וקטורים המקיימות $B\subseteq Sp(A)$, אזי מהאי-שוויון $|B|>|A|$ נובע ש- B תלויה ליניארית.

מהטענה נובע ש- $B\not\subset Sp(A)$. לכן קיים וקטור $\bar{b}_i\in B$ שאינו שייך ל- $Sp(A)$ נוכיח שהקבוצה $A\cup\{\bar{b}_i\}$ בלתי תלויה. לצורך זה יש להוכיח שלמשוואה $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...\alpha_m\bar{a}_m+\beta\bar{b}_i=\bar{0}$ יש פתרון טריביאלי בלבד.

מכוון ש- $\bar{b}_i\notin Sp(A)$ המקדם β שווה לאפס (אחרת היינו מקבלים

$\bar{b}_i = -\frac{\alpha_1}{\beta}\bar{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\bar{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\beta}\bar{a}_m \in Sp(A)$ שסותר את ההנחה $\bar{b}_i \notin Sp(A)$). מהשוויון $\beta = 0$ ו $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots \alpha_m\bar{a}_m + \beta\bar{b}_i = \bar{0}$ אנו מקבלים $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{a}_m = \bar{0}$. לפי הנתון הוקטורים $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ בת"ל. לכן $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

5. 20 נקודות.

תהיינה $A,B,C \in M_n(F)$ מטריצות כלשהן. הוכח ש:

א. $R(BA) \le R(A); C(AC) \le C(A)$

ב. אם B,C הפיכות אז $R(BA) = R(A); C(AC) = C(A)$.

<u>הוכחה של $R(BA) \le R(A)$.</u>

מרחב השורות $R(BA)$ נפרש ע"י השורות $(BA)_1,\ldots,(BA)_n$. מהגדרת כפל מטריצות אנו מקבלים $(BA)_i = B_iA$. נכתוב את המטריצה A כמערך של שורות: $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ כאשר A_i מסמן את שורה ה-i של המטריצה A. אזי

$$B_iA = \begin{pmatrix} B_{i1} & B_{i2} & B_{i3} & \ldots & B_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = B_{i1}A_1 + B_{i2}A_2 + B_{i3}A_3 + \ldots + B_{in}A_n \in Sp(A_1,\ldots,A_n) = R(A)$$

הוכחנו ש-$(BA)_i = B_iA \in R(A)$ לכל i. לכן $R(BA) = Sp((BA)_1,\ldots,(BA)_n) \le R(A)$.

<u>הוכחה של $C(AC) \le C(A)$.</u>

נשתמש בשוויון $C(X) = R(X^T)^T$ שמתקיים לכל מטריצה X. נקבל $C(AC) = R((AC)^T)^T = R(C^TA^T)^T$. מהסעיף הקודם אנו מקבלים $R(C^TA^T) \le R(A^T)$. לכן $C(AC) = R(C^TA^T)^T \le R(A^T)^T = C(A)$.

<u>חלק ב.</u>

מחלק א' נובע ש-$R(BA) \le R(A)$. האי-שוויון הזה מתקיים לכל שתי מטריצות A,B מסדר n. נציב BA במקום A ו B^{-1} במקום B. נקבל $R(B^{-1}(BA)) \le R(BA) \Rightarrow R(A) \le R(BA)$.
משני האי-שוויונות $R(BA) \le R(A)$ ו $R(A) \le R(BA)$ מקבלים את השוויון הנדרש.

מחלק א' נובע ש-$C(AC) \le C(A)$. האי-שוויון הזה מתקיים לכל שתי מטריצות A,C מסדר n. נציב AC במקום A ו C^{-1} במקום C. נקבל $C((AC)C^{-1}) \le C(AC) \Rightarrow C(A) \le C(AC)$.
משני האי-שוויונות $C(AC) \le C(A)$ ו $C(A) \le C(AC)$ מקבלים את השוויון הנדרש.

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על כל השאלות. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

6. מצא את הבסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $V \le \mathbf{R}^4$ ו $U \le \mathbf{R}^4$ כאשר $U = \mathrm{Sp}(\,(-3,1,0,1),(-3,1,1,0)\,), V = \mathrm{Sp}(\,(-4,1,1,1),(-2,0,1,1))$. השלם את הבסיס של $U \cap V$ לבסיס של $\mathbf{R}^4$.

בסיס של הסכום $U+V$.

מכוון ש- $U+V = \mathrm{Sp}(\,(-3,1,0,1),(-3,1,1,0),(-4,1,1,1),(-2,0,1,1))$ ניתן לבחור את הבסיס כתת-קבוצה של הקבוצה הפורשת $\{(-3,1,0,1),(-3,1,1,0),(-4,1,1,1),(-2,0,1,1)\}$. לצורך זה נעמיד את הוקטורים למטריצה ונדרג אותה

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 + R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

האיברים הפותחים נמצאים בעמודות 1,2,3 של המטריצה המדורגת. לכן הוקטורים 1,2,3 של הקבוצה הפורשת מהווים בסיס של $U+V$:

$(-3,1,0,1),(-3,1,1,0),(-4,1,1,1)$.

כדי למצוא בסיס של החיתוך נכתוב כל אחד מהמרחבים כקבוצת הפתרונות של מערכת הומוגנית.

תת-מרחב U:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \leftrightarrow R_4 \\ R_2 \leftrightarrow R_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & w \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 1 & y \\ -3 & -3 & x \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_1 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1 + 3R_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & w \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & y - z - w \\ 0 & 0 & x + 3z + 3w \end{pmatrix}$$

לכן $U = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} y - z - w = 0 \\ x + 3z + 3w = 0 \end{cases} \right\}$. בופן דומה $W = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x - w = 0 \end{cases} \right\}$. מכאן נובע ש-

$U\cap W=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbf{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} y-z-w=0\\ x+3z+3w=0\\ x+2y+2z=0\\ x-w=0\end{cases}\right\}$. הפתרון הכללי של המערכת האחרונה

הוא $(-6w,2w,w,w)$. לכן בסיס של החיתוך הוא: $(-6,2,1,1)$.

בדיקה: בשאלות מסוג זה תמיד כדי לבדוק האם מתקיים השוויון:
$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)$.
אם השוויון לא מתקיים, אז יש טעות בחישובים. במקרה שלנו השוויון מתקיים, כי $2+2=3+1$.

<u>השלמת הבסיס.</u> נוסיף את הבסיס הסטנדרטי לבסיס החיתוך ונדרג את המטריצה

המתקבלת $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. אחרי הדירוג נקבל את המטריצה הבאה:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$. לכן הבסיס ההושלם הוא:

$(-6,2,1,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$.

7. נתונה מטריצה ממשית

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1\\ a & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.
א. מצא את כל הערכים של a שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.
ב. לכל הערכים של הפרמטר שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של $C(A)$ ו $R(A)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1\\ a & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2\leftarrow R_2-aR_1\\ R_3\leftarrow R_3-R_1\\ R_4\leftarrow R_4-R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1\\ 0 & 1-a^2 & 1+a & -1-a\\ 0 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 1-a & 2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1\\ 0 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 1-a^2 & 1+a & -1-a\\ 0 & 1-a & 2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3\leftarrow R_3-(a+1)R_1\\ R_4\leftarrow R_4-R_2}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1\\ 0 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1+a & -1-a\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3\leftrightarrow R_4\\ R_3\leftarrow 0.5R_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1\\ 0 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1+a & -1-a\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-(1+a)R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1\\ 0 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

מהמטריצה האחרונה רואים ש- $rank(A)=2$ כאשר $a=1$ ו $rank(A)=3$ כאשר $a\neq 1$.

במקרה שבו דרגה מינימלית (כלומר- $rank(A)=2$ ו $a=1$) המטריצה המדורגת תהיה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. לכן השורות $(1,1,-1,1),(0,0,1,-1)$ מהוות בסיס

של $R(A)$ ועמודות $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ מהוות בסיס של $C(A)$.

8. יהי $A=(\bar{a}_1=(-2,a,b),\bar{a}_2=(c,0,d))$ בסיס של תת-מרחב $V=\{(x,y,z)\,|\,x+2y+z=0\}$ ($V\le \mathbf{R}^3$) כאשר $a,b,c,d\in \mathbf{R}$ סקלרים לא ידועים.

א. מצא את a,b,c,d אם ידוע ש $[(1,-1,1)]_A=(-1,1)$.

ב. מצא את ${}_BT_A$ כאשר $B=(\bar{b}_1=(1,1,-3),\bar{b}_2=(-3,1,1))$

מהשוויון $[(1,-1,1)]_A=(-1,1)$ אנו מקבלים

$$(1,-1,1)=(-1)\cdot\bar{a}_1+1\cdot\bar{a}_2=(-1)\cdot(-2,a,b)+1\cdot(c,0,d)=(2+c,-a,-b+d)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2+c=1 \\ -a=-1 \\ -b+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a=1 \\ -b+d=1 \end{cases}$$

מהשייכות $\bar{a}_1,\bar{a}_2\in V$ אנו מקבלים $-2+2a+b=0, c+d=0$ לכן $b=0,d=1$ ו $\bar{a}_1=(-2,1,0),\bar{a}_2=(-1,0,1)$. כדי למצוא מטריצת-מעבר ${}_BT_A$ נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{matrix}}_{\text{basis}B} & \underbrace{\begin{matrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{basis}A} \end{pmatrix}$$

. נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 1 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. לכן ${}_BT_A=\begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$.

דרך שנייה למציאת מטריצת מעבר : מטריצת מעבר ${}_BT_A$ צריכה לקיים את המשוואה $\left(\bar{b}_1^T\bar{b}_2^T\right)\cdot{}_BT_A=\left(\bar{a}_1^T\bar{a}_2^T\right)$, כלומר $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot{}_BT_A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. נסמן

${}_BT_A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ ונציב לתוך המשוואה הקודמת. נקבל

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. פתרון של המשוואה נותן את אותה התשובה

${}_BT_A=\begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$.

9. נתון אופרטור ליניארי $L: M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדר ע"י הנוסחה

$L(X) = XA + BX$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

א. חשב את המטריצה של L בבסיס E:

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ של $M_2(\mathbf{R})$.

ב. מצא בסיסים של $Ker(L)$ ו $\mathrm{Im}(L)$.

<u>א חישוב המטריצה של L.</u>

$$L(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E_1 \Rightarrow [L(E_1)]_E = (2,0,0,0),$$

$$L(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2E_2 \Rightarrow [L(E_2)]_E = (0,2,0,0),$$

$$L(E_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2E_3 - 2E_4 \Rightarrow [L(E_2)]_E = (0,0,2,-2),$$

$$L(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2E_3 + 2E_4 \Rightarrow [L(E_2)]_E = (0,0,-2,2).$$

לכן $[L]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>חישוב המטריצה של L בדרך השנייה</u>:

. נכתוב $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. אזי

$$L(X) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z-y & -x+2y+w \\ x+2z-w & y-z+2w \end{pmatrix}$$

נציב את הבסיס E ונקבל:

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad L\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

נתאים למטריצות שבבסיס וקטורים בצורה הבאה:

למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ נתאים את הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ושמור על הסדר לשאר המטריצות ונקבל :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$ נדרג ונקבל

מטריצה $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$ לכן מטריצת ההעתקה היא :

$$[L]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>ב. חישוב בסיס של $\mathrm{Im}(L)$.</u>

נדרג את נמטריצה $[L]_E$. נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ שדרגתה שווה ל-3. לכן $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 3$ ו

$\mathrm{Im}(L)$ נפרש ע"י הוקטורים $L(E_1) = 2E_1, L(E_2) = 2E_2, L(E_3) = 2E_3 - 2E_4$.

<u>חישוב בסיס של $\mathrm{Im}(L)$ בדרך השנייה .</u>

כדי למצוא בסיס $\mathrm{Im}(L)$ נדרג את המטריצה הבאה :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$ נקבל $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ולכן הבסיס של $\mathrm{Im}(L)$ הוא :

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

ב. חישוב בסיס של $Ker(L)$.

כדי למצוא גרעין של האופרטור נכתוב $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ ונציב בנוסחה של L :

$L(X)=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+z-y & -x+2y+w \\ x+2z-w & y-z+2w \end{pmatrix}$. מהשוויון $L(X)=0$ מקבלים

$$\begin{pmatrix} 2x+z-y & -x+2y+w \\ x+2z-w & y-z+2w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+z-y=0 \\ -x+2y+z=0 \\ x+2z-w=0 \\ y-z+2w=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-w \\ y=-w \\ z=w \end{cases}$$

. לכן הבסיס של הגרעין הוא $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

בדיקה: בשאלות מסוג זה תמיד כדי לבדוק האם מתקיים השוויון:
$\dim(\mathrm{Im}(L))+\dim(Ker(L))=\dim(V)$.
אם השוויון לא מתקיים, אז יש טעות בחישובים. במקרה שלנו השוויון מתקיים, כי 1+3=4.

10. נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ כאשר a פרמטר ממשי.

א. מצא a אם נתון ש- a הינו ערך עצמי של A.
ב. עבור a שמצאת בחלק א' מצא את המטריצה המלכסנת T של A.

א. מכוון ש- a הינו ע"ע של A, אנו מקבלים $\det(A-aI_3)=0$. מכאן נובע ש:

$\begin{vmatrix} 2-a & 1 & a \\ 1 & 2-a & 1 \\ a & 1 & 2-a \end{vmatrix}=0$ אחרי פתיחת הדטרמיננטה מקבלים

$(a-2)^3+2a-a^2(2-a)-2(2-a)=0\Leftrightarrow 4a^2-8a+4=0\Leftrightarrow a=1$.

ב. בסעיף הקודם מצאנו ש- $a=1$. לכן צריך ללכסן את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

הפולינום האופייני: $|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4$.

מהסעיף הקודם ידוע לנו ש- $\lambda=1$ הוא שורש של המשוואה $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4=0$.
נחלק את הפולינום $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4$ ב- $\lambda-1$. אז נקבל

$$\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)\Rightarrow$$
$$(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=4$$

מציאת מרחבים עצמיים.

בסיס של V_1

$V_1 = Ker(1\cdot I_3 - A) = Ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. אחרי דירוג המטריצה

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ נקבל:

$$Ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \{(-y-z, y, z)\}.$$

לכן הבסיס הסטנרטי של V_1 הינו $(-1,1,0),(-1,0,1)$.

בסיס של V_4

$V_4 = Ker(4\cdot I_3 - A) = Ker\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. אחרי דירוג המטריצה

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ נקבל:

$$Ker\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_4 = \{(z, z, z)\}.$$

לכן הבסיס הסטנרטי של V_4 הינו $(1,1,1)$.

מכוון ש $\dim(V_1) + \dim(V_4) = 3$ המטריצה המקורית לכסינה

והמטריצה המלכסנת היא $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

בהצלחה !