המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> מבחן באלגברה ליניארית ב, 16.02.2016
סמסטר א', מועד א'. תשע"ו.
המרצים: פרופ' מיכאל מוזיצ'וק, דר' גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר
משך המבחן: 3 שעות

אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

חלק א'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על שתי שאלות מהשאלות 1-3 ועל שאלה אחת מהשאלות 4-5. ניתן להשתמש באופן חופשי בכל טענה שהוכחה בהרצאה כל עוד היא מצוטטת במדויק.

1. 15 נקודות.

תהיינה $U=\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid A=A^T\}$ ו $W=\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid A=-A^T\}$.

א. הוכח ש U,W הם תתי-מרחבים של $M_n(\mathbf{R})$.

ב. הוכח ש $M_n(\mathbf{R})$ הוא הסכום של U ו W.

2. 15 נקודות.

הוכח שאם V מרחב שמימדו n, אזי לכל קבוצת וקטורים $S\subseteq V$ בת n איברים מתקיים.

א. $Sp(S)=V \Leftarrow S$ בת"ל.

ב. $Sp(S)=V \Rightarrow S$ בת"ל.

3. 15 נקודות.

תהי $L:V\to W$ העתקה לינארית בין שני מרחבים ממימד סופי:
$\dim(V)=n, \dim(W)=m$ (שני המרחבים מוגדרים מעל אותו שדה F). הוכח שאם $\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},\dots,\bar{b}_n$ בסיס של V ו $\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_k$ בסיס של $Ker(L)$ אזי $L(\bar{b}_{k+1}),\dots,L(\bar{b}_n)$ הוא בסיס של $\mathrm{Im}(L)$.

4. 20 נקודות.

א. תהי $B=\{\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n\}$ קבוצה בלתי תלויה של וקטורים מהמרחב V. הוכח שאם לכל $\bar{v}\in V$ הקבוצה $\{\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n,\bar{v}\}$ ת"ל, אזי B בסיס של V.

ב. תהי $B=\{\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n\}$ קבוצה פורשת של המרחב V. הוכח שאם כל תת-קבוצה של B אינה פורשת את V, אזי B בסיס של V.

5. 20 נקודות.

תהיה $L:V\to W$ העתקה לינארית בין מרחבים ממימד סופי. הוכח כי

$$\dim(Ker(L))+\dim(\mathrm{Im}(L))=\dim(V)$$

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על 5 שאלות בלבד. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

6. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^4$ ו $V \le \mathbf{R}^4$ כאשר $V = \mathrm{Sp}(\,(2,1,4,3),(0,3,2,5),(1,\text{-}4,\text{-}1,\text{-}6))$, $U = \mathrm{Sp}(\,(1,2,3,4),(1,\text{-}1,1,\text{-}1)\,)$. השלם את בסיס של $U \cap V$ עד בסיס של $\mathbf{R}^4$.

7. נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 1 & b \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים.

א. מצא את כל הערכים של a,b שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.

ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של $C(A)$.

8. $B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ ו $A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ שני בסיסים של תת-מרחב דו-מימדי V $(V \le \mathbf{Z}_5^3)$.

א. מצא את $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ אם ידוע ש $_AT_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = (-2,1,1), \bar{b}_1 = (1,1,1)$ ו $\bar{a}_2 = (1,x,y), \bar{b}_2 = (2,z,w)$.

ב. האם קיים וקטור $\bar{v} \in \mathbf{Z}_5^3$ השונה מאפס כך ש- $[\bar{v}]_A = [\bar{v}]_B$? נמק.

9. נתונה העתקה ליניארית $L : \mathbf{R}_3[x] \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה

$$L(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) & -p(0) \\ -p(0) & p(1) \end{pmatrix}.$$

א. חשב את המטריצה של L בבסיסים $B = (1, x, x^2, x^3)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ ו $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ של $M_2(\mathbf{R})$.

ב. מצא בסיסים של $Ker(L)$ ו $\mathrm{Im}(L)$.

10. מצא העתקה לינארית L מ-$\mathbf{R}_2[x]$ ל $\mathbf{R}^2$ שמטריצת $_A[L]_B$ בבסיסים

$$B = (\bar{b}_1 = x^2, \bar{b}_2 = x^2 + x, \bar{b}_3 = x^2 + x + 1); \quad A = (\bar{a}_1 = (1,1), \bar{a}_2 = (1,-1))$$

שווה ל- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. נתונה מטריצה ממשית $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A וחשב את A^{2016}.

בהצלחה !

תשובות

1. א. נשים לב כי $U=\{A\in M_n(\mathbf{R})\,|\,A=A^T\}\neq\phi$, כיון שמטריצת ה-0 מקיימת את התנאי. אם $A\in U$ אז מתקיים $A=A^T$ ואז מתקיים $\alpha A=(\alpha A)^T$, ולכן U סגור לכפל בסקלר. אם $A,B\in U$ אז מתקיים $A=A^T$ ו-$B=B^T$ ואז ואז מתקיים, ולכן U סגור לחבור ולכן הוא תת מרחב. בצורה דומה W הוא תת מרחב.

ב. כדי להראות כי $M_n(\mathbf{R})$ הוא הסכום של U ו W, מספיק להראות כי מטריצה כלשהי A היא סכום של שתי מטריצות האחת זוגית והאחת אי זוגית. ואכן לכל מטריצה A מתקיים

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2},\ (\frac{A+A^T}{2})^T=\frac{(A)^T+(A^T)^T}{2}=\frac{A^T+A}{2},$$

$$(\frac{A-A^T}{2})^T=\frac{(A)^T-(A^T)^T}{2}=\frac{A^T-A}{2}=-(\frac{A-A^T}{2})$$

כלומר אכן A היא סכום של מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי סימטרית.

3. לכל $w\in \mathrm{Im}(L)$ קים $v\in V$ כך ש L(v)=w, ולפי הגדרת הבסיס קימים מקדמים $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ כך שמתקיים $v=\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\cdots\alpha_n\bar{b}_n$ ולכן מתקיים כי $w=L(v)=\alpha_1L(\bar{b}_1)+\alpha_2L(\bar{b}_2)+\cdots\alpha_nL(\bar{b}_n)=\alpha_{k+1}L(\bar{b}_{k+1})+\cdots\alpha_nL(\bar{b}_n)$ ולכן הקבוצה הזו פורשת את $\mathrm{Im}(L)$. נוכיח כי היא בת"ל. נניח כי נתונים $\beta_{k+1},\cdots,\beta_n$ כך שמתקיים $\beta_{k+1}L(\bar{b}_{k+1})+\cdots\beta_nL(\bar{b}_n)=\bar{0}$ וצ"ל כי כולם מקדמי 0. נביט על $u=\beta_{k+1}\bar{b}_{k+1}+\cdots+\beta_n\bar{b}_n$ אז מתקיים $L(u)=0$ ולכן $u\in Ker(L)$ ולכן קימים מקדמים $\beta_1,...,\beta_k$ כך ש $u=\beta_{k+1}\bar{b}_{k+1}+\cdots+\beta_n\bar{b}_n=\beta_1\bar{b}_1+\cdots+\beta_k\bar{b}_k$. נעביר אגפים ולכן $\beta_{k+1}\bar{b}_{k+1}+\cdots+\beta_n\bar{b}_n-\beta_1\bar{b}_1-\cdots-\beta_k\bar{b}_k=\bar{0}$ ולפי חוסר התלות של הבסיס נובע כי $\beta_{k+1}=\cdots=\beta_n=-\beta_1-\cdots-\beta_k=0$, כדרוש.

4. א. נותר להראות כי B פורשת. יהי נתון $\bar{v}\in V$ וצ"ל כי הוא נפרש על ידי B. הקבוצה $\{\bar{b}_1,...,\bar{b}_n,\bar{v}\}$ ת"ל ולכן יש $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ שאינם כולם 0 כך ש $\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\cdots\alpha_n\bar{b}_n+\beta v=\bar{0}$. נראה כי חיב להתקיים $\beta\neq 0$ משום ש $\beta=0$ היה גורר כי $\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\cdots\alpha_n\bar{b}_n=\bar{0}$ וזה היה גורר כי $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ סתירה לכך שלא כל המקדמים הם 0. נעביר אגפים ונחלק ונקבל $v=-\frac{1}{\beta}(\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\cdots\alpha_n\bar{b}_n)$

כלומר B פורשת את ה v, לכל v, כדרוש.

ב. נותר להראות כי B בת"ל. יהיו נתונים $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ כך ש $\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\cdots\alpha_n\bar{b}_n=\bar{0}$. אם היה נכון כי $\alpha_n\neq 0$ אז על ידי העברת אגפים נובע כי $\bar{b}_n=-\frac{1}{\alpha_n}(\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\cdots\alpha_{n-1}\bar{b}_{n-1})$. נגדיר $C=\left\{\bar{b}_1,...,\bar{b}_{n-1}\right\}$. אז השויון האחרון אומר כי $\bar{b}_n\in Sp(C)$ וברור כי $C\subseteq Sp(C)$ ולכן $B\subseteq Sp(C)$ ולכן $V=Sp(B)\subseteq Sp(C)$ כלומר C קבוצה חלקית ממש של B שר פורשת את V וזו סתירה לנתון. לכן צריך להתקיים $\alpha_n=0$. בצורה דומה לכל k, $\alpha_n=0$, ולכן B בת"ל, כדרוש.

6. נעביר את U ואת V לצורה של משוואות:

$$\begin{pmatrix}1&1&a\\-1&2&b\\1&3&c\\-1&4&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&3&a+b\\0&2&c-a\\0&5&a+d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&2a+b-c\\0&2&c-a\\0&5&a+d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&2a+b-c\\0&2&c-a\\0&5&a+d\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&2a+b-c\\0&0&3c-5a-2b\\0&0&-9a+d-5b+5c\end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת המרחב המקיים את המשוואות $3c-5a-2b=0,-9a+d-5b+5c=0$ ובצורה דומה

$$\begin{pmatrix}1&2&0&a\\-4&1&3&b\\-1&4&2&c\\-6&3&5&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&a\\0&9&3&b+4a\\0&6&2&a+c\\0&15&5&d+6a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&a\\0&3&1&b+3a-c\\0&6&2&a+c\\0&15&5&d+6a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&a\\0&3&1&b+3a-c\\0&0&0&-5a+3c-2b\\0&0&0&d+6a-5b-15a+5c\end{pmatrix}$$

כלומר V הוא תת המרחב המקיים את המשוואות $-5a+3c-2b=0,d+5c-5b-9a=0$.
מכיון שקבלנו את אותן משוואות עבור U ועבור V, נובע כי
$U=V=U\cap V=U+V$. למשל הוקטורים $(1,2,3,4),(1,-1,1,-1)$ הם בסיס ל U ולכן
לV ול $U\cap V=U+V$. כדי להשלים לבסיס של $\mathbf{R}^4$, נוסיף כל שני וקטורים בת"ל
שאינם נפרשים למשל $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$, ונבדוק כי המטריצה המורכבת
מהעמודות הללו הפיכה. $\det(\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&3&1\\0&0&4&-1\end{pmatrix})=\det\begin{pmatrix}3&1\\4&-1\end{pmatrix}=-7$ כדרוש.

7.

$$\begin{pmatrix}2&-1&1&a&1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\2&-1&1&a&1\\1&7&-4&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&a-8&-3\\0&5&-3&-3&b-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&a-8&-3\\0&0&0&a-11&b-5\end{pmatrix}$$

ולכן הדרגה המינימלית היא כאשר a=11,b=5. עבור הערכים הללו בסיס של C(A) הוא {(2,1,1),(-1,2,7)}.

8.א. לפי הנתון

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},2\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\z\\w\end{pmatrix}\to-2+c=1,-4+d=2\to c=3,d=6,$$

$$1+3x=1,1+3y=1,\to x=y=0,z=w=2$$

ב. נסמן $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = [\bar{v}]_A = [\bar{v}]_B$ אז

$p = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 6-x \end{pmatrix} = (1-x)(6-x)-6 = -7x+x^2 = x(x-7)$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ אז

הע״ע של T הם 0 ו 7, ולכן 1 איננו ע״ע של T, ולכן למשואה אין פתרון.

9. $L(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A_1 - A_2 - A_3 + A_4, L(x) = L(x^2) = L(x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} == A_1 + A_4$

ולכן מטריצת ההעתקה בבסיסים הללו היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. לכן

$\mathrm{Im}(L) = Sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in R\right\}$ ו

$Ker(L) = \{p, p(1) = 0, ax + bx^2 + cx^3, a + b + c = 0\} = \{x(a + bx - (a+b)x^2), a, b \in R\}$

10

$L(x^2) = (1,1), L(x^2+x) = (2,0), L(x^2) + L(x) = (1,1) + L(x) = (2,0) \rightarrow L(x) = (1,-1), L(x^2+x+1) =$

$L(x^2+x) = L(x^2+x) + L(1) \rightarrow L(1) = 0,$

$L(ax^2+bc+c) = aL(x^2) + bL(x) + cL(1) = a(2,0) + b(1,-1) + c(0,0) = (2a+b, -b)$

11. נתונה מטריצה ממשית

$-p = \det\left(\begin{pmatrix} -3-x & 4 & 4 \\ -2 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} -3-x & 1-x & 4 \\ -2 & 1-x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}\right) = (1-x)^2 \det\left(\begin{pmatrix} -3-x & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (1-x)^2 \det\left(\begin{pmatrix} -1-x & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$-(1-x)^2(x+1)$

לכן הע״ע העצמיים של A הם ± 1. נציב כל ע״ע במערכת ונמצא ו״ע הצמודים להם.

עבור 1-, נקבל $\begin{pmatrix} -3-x & 4 & 4 \\ -2 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ פורש את המרחב הצמוד ועבור 1 נקבל

$\begin{pmatrix} -3-x & 4 & 4 \\ -2 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ונביט ב

$$P=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&-1&0\\0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&1&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&2&1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&-1&-1\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix},P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&4&4\\-2&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=D$$

ג. ולכן $A=PDP^{-1}\to A^{2016}=PD^{2016}P^{-1}=PIP^{-1}=I$