יום ה, יא טבת התשסח- 20-12-2007

מטריצות העתקה:

דוגמא ראשונה – שקילות מטריצות

יהיו $F=R, V=R^4, W=R^3$ ונגדיר $T:V\to W$ על ידי :
$T((x,y,z,w))=(x+2y+3z+4w,5x+6y+7z+8w,9x+10y+11z+12w)$ וברור כי זו העתקה לינארית.

נביט בבסיסים הסטנדרטיים
$E=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}, F=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ונבטא את המטריצה של L בבסיסים אלו:

$T((1,0,0,0))=(1,5,9)=e_1+5e_2+9e_3$

$T((0,1,0,0))=(2,6,10)=2e_1+6e_2+10e_3$

$T((0,0,1,0))=(3,7,11)=3e_1+7e_2+11e_3$

$T((0,0,0,1))=(4,8,12)=4e_1+8e_2+12e_3$

ולכן מטריצת ההעתקה היא

$$A={}_F[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$$

כעת נפעל על השורות של A ונעשה לה תהליך גאוס ונקבל:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-9S_1\to S_3]{S_2-5S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-8&-16&-24\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2/(-4)\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-2S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\end{pmatrix}$$

ולכן שתי העמודות הראשונות של A הן בסיס של IM(T), ואותו נוכל להשלים לבסיס של $W=R^3$.

$C=\{(1,5,9),(2,6,10),(1,0,0)\}$.

נבחר את (1,0,0,0) בתור אבר בתמונה ההפוכה על ידי T של (1,5,9).
נבחר את (0,1,0,0) בתור אבר בתמונה ההפוכה על ידי T של (2,6,10).
נביט על בסיס של Ker(T .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow x = z + 2w, y = -2z - 3w, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 2w \\ -2z - 3w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לפי המשפט dim(Im(T)+dim(Ker(T)=dim(V) נובע כי
B={(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)} הוא בסיס של R^4.

נחשב את המטריצה של Tבבסיסים C,B.

$T(1,0,0,0)=(1,5,9)=1b_1+0b_2+0b_3$.
$T(0,1,0,0)=(2,6,10)=0b_1+1b_2+0b_3$.
$T(1,-2,1,0)=(0,0,0)=0b_1+0b_2+0b_3$.
$T(2,-3,0,1)=(0,0,0)=0b_1+0b_2+0b_3$.

ולכן נקבל את מטריצת ההעתקה:

$${}_C[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת ננסה לבדק את הטענה הבאה בהקשר לדוגמא הקודמת.

$${}_C[T]_B = {}_C[M]_F \, {}_F[T]_E \, {}_E[M]_B$$

כאשר F,E,B,C הם הבסיסים שחושבו קודם. אז

$$A = {}_F[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D = {}_C[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}_E[M]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_E[M]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז המטריצה ההפוכה של המטריצה האחרונה היא המטריצה הנחוצה עבור השויון וקל לראות כי זו המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-9S_1\to S_3]{S_2-5S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1+S_3\to S_1]{S_2+5S_3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2/(-4)\to S_2]{S_1+S_2/2\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2.25 & -1.25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן קל לבדוק כי:

$$_C[M]_E = \begin{pmatrix} 0 & -2.5 & 1.5 \\ 0 & 2.25 & -1.25 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

אז אכן נקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & -2.5 & 1.5 \\ 0 & 2.25 & -1.25 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדרוש.

דוגמא שניה – צמידות מטריצות מופיעה בקבץ קודם

יהיו $F=R, V=W=R^3$ ונגדיר $L:V\to W$ על ידי : $L((x,y,z))=(2x+3y+5z,x+4y+5z,-x-3y-4z)$
וברור כי זו העתקה לינארית.

נביט בבסיס הסטנדרטי $E=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ונבטא את המטריצה של L בבסיס זה.

$L((1,0,0))=(2,1,-1)=2e_1+e_2-e_3$

$L((0,1,0))=(3,4,-3)=3e_1+4e_2-3e_3$

$L((0,0,1))=(5,5,-4)=5e_1+5e_2-4e_3$

ולכן מטריצת ההעתקה היא

$$A = {}_E[L]_E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

נחשב את הפולינום האפיני של A ונקבל :

$$p_A(x) = \det(xI - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} x-2 & -3 & -5 \\ -1 & x-4 & -5 \\ 1 & 3 & x+4 \end{pmatrix})$$

נבצע פעולות אלמנטריות על המטריצה האחרונה:

$$\begin{pmatrix} x-2 & -3 & -5 \\ -1 & x-4 & -5 \\ 1 & 3 & x+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1+(x-2)S_2 \to S_1]{S_2+S_3 \to S_2} \begin{pmatrix} 0 & (x-2)(x-4)-3 & -5(x-2)-5 \\ 0 & x-1 & x-1 \\ 1 & 3 & x+4 \end{pmatrix}$$

אז

$$p_A(x) = (x-1)\det(\begin{pmatrix} 0 & x^2-6x+5 & -5(x-1) \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & x+4 \end{pmatrix}) = (x-1)(x^2-6x+5+5x-5) = (x-1)(x^2-x) = x(x-1)^2$$

ולכן יש שני ערכים עצמיים x=0,1.

נציב x=0 ונקבל את המטריצה A. נחשב את Ker(A) ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1+2S_3 \to S_1]{S_2+S_3 \to S_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+3S_2 \to S_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אם נפתר נקבל וקטור עצמי (1,1,-1) הצמוד לערך העצמי 0.

נחשב את Ker(I-A).

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -3 & -5 \\ -1 & 1-4 & -5 \\ 1 & 3 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ולכן המשואה המאפינת את Ker(I-A) היא x+3y+5z=0 ויש למרחב העצמי הצמוד לערך העצמי x=1 בסיס בן שני וקטורים, למשל (3,-1,0),(5,0,-1).

נביט בבסיס בן 3 הוקטורים העצמיים ונבטא את L בבסיס זה:

$L(1,1,-1)=(0,0,0)=0b_1+0b_2+0b_3.$
$L(5,0,-1)=(5,0,-1)=0b_1+1b_2+0b_3.$
$L(3,-1,0)=(3,-1,0)=0b_1+0b_2+1b_3.$

ולכן:

$$A = {}_B[L]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת ננסה לבדק עבדה זו על ידי המשואה

$${}_B[L]_B = {}_B[T]_E\,{}_E[L]_E\,{}_E[T]_B$$

ונקבל:

$${}_E[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ נבצע הפוך ונקבל:

$${}_B[T]_E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$ ואז:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כדרוש.