NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

מבחן אמצע באלגברה לינארית ב למדעי המחשב.

יום ו, ל ניסן התשס"ו 28-4-2006

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות יכתבו בטופס המבחן, במקרה שחסר מקום, אפשר לכתוב תשובות (לשאלות פתוחות) גם במחברת. עבור שאלות 1 ו-3 יש לכתוב תשובות סופיות בלבד.

בהצלחה.

שאלה 1 (20 מקודות):

עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, בדק במחברתך האם W הוא תת מרחב של V וענה על השאלות המצורפות.

א. $F = R, V = R^2, W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x \in Q, y \in Q\}$

ענה על השאלות הבאות על ידי הקפת התשובה הנכונה:

א-1 האם W ריקה? כן לא

א-2 האם W בתוך V אדיטיבית? כן לא

א-3 האם W בתוך V הומוגנית? כן לא

ב. $F = Q, V = R^2, W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x \in Q, y \in Q\}$

ענה על השאלות הבאות על ידי הקפת התשובה הנכונה:

ב-1 האם W ריקה? כן לא

ב-2 האם W בתוך V אדיטיבית? כן לא

ב-3 האם W בתוך V הומוגנית? כן לא

Fax: (972-9) 8607711 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

<u>שאלה 2 (20 נקודות)</u>

עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, ענה על השאלות המצורפות בקשר למרחב הנפרש.

א. נתונים שלשת הוקטורים $A=\{u=(1,2,3),v=(4,5,6),w=(7,8,8)\}$ האם זו קבוצה הפורשת את $V=R^3$, $F=R$, נמקו תשובתכם.

ב. נביט על $F=R, V=M_{(3,3)}(R), W\subseteq V$, $W=\{$המטריצות הסימטריות$\}$

ותהינה:

$$C=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&4&9\\5&9&6\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&7&9\\3&9&8\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&7&9\\5&9&8\end{pmatrix}$$

מהי הטענה הנכונה? $SP\{A,B\}=SP\{C,D\}$, $SP\{A,B\}\neq SP\{C,D\}$, $SP\{A,B\}\subseteq SP\{C,D\}$, או $SP\{C,D\}\subseteq SP\{A,B\}$? נמקו תשובתכם.

שאלה 3 (30 נקודות)

א- נתונים מרחב וקטורי V מעל R ושלשה וקטורים {u,v,w} שהם ת"ל. האם הוקטורים {u+v,v+w,w+u} מהוים קבוצה בת"ל?

תשובה: כן לא

ב- נתונים מרחב וקטורי V מעל R ושלשה וקטורים {u,v,w} שהם ב"תל. האם הוקטורים {u+v,v+w,w+u} מהוים קבוצה בת"ל?

תשובה: כן לא

ג- נתונים מרחב וקטורי V מעל R ושלשה וקטורים {u,v,w} שהם ב"תל. האם הוקטורים {u+v+w,v+w,w} מהוים קבוצה בת"ל?

תשובה: כן לא

שאלה 4 (30 נקודות)

א. תן דוגמא למרחב וקטורי ולארבעה וקטורים שהם ת"ל, וכך שכל שלשה מתוך ארבעת הוקטורים גם הם ת"ל.

ב. תן דוגמא למרחב וקטורי ולארבעה וקטורים הפרשים את המרחב, וכך שכל שלשה מתוך ארבעת הוקטרים גם הם פורשים את המרחב.

ג. תן דוגמא למרחב וקטורי V וקבוצה חלקית לא ריקה W אשר לא אדיטיבית ולא הומוגנית בתוך V.

תשובות לשאלות

תשובה לשאלה 1

1-א-1 הוקטור (1,0) מראה כי $W\neq\emptyset$. 1-א-2 $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ והעובדה כי Q שדה מראה כי W סגורה ביחס לאדיטיביות. 1-א-3 $\pi(1,0)=(\pi,0)$ מראה כי W איננה סגורה ביחס להומוגניות.

1-ב-1 הוקטור (1,0) מראה כי $W\neq\emptyset$. 1-ב-2 $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ והעובדה כי Q שדה מראה כי W סגורה ביחס לאדיטיביות. 1-ב-3 $c(a,b)=(ca,cb)$ והעובדה כי Q שדה מראה כי W סגורה ביחס להומוגניות.

תשובה 2

2-א-1,2,3 המטריצה אותה יש לדרג היא $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ נבצע שלב אחד וניצר עמודת I.

נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. נמשיך עוד שלב ונקבל:

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. לכן התשובה היא שהקבוצה פורשת.

2-ב-1 המטריצה לדרוג היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 9 & 9 \\ 6 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$ נדרג ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ נמשיך ונדרג ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$ לכן אין הכלה של המרחבים הנפרשים. כעת נביט בתהליך ההפוך:

אשר הופכת להיות לאחר שלב ל- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 5 & 9 \\ 6 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

ולאחר עוד שלב הופכת למטריצה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ולכן ההכלה ההפוכה גם כן לא מתקימת. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

תשובה 3

3- א- נביט על

$$a(u+v)+b(v+w)+c(w+u)=$$
$$du+ev+fw$$

נפתח ונקבל מערכת משוואות:

$$a+c=d,a+b=e,b+c=f$$

ופתרונה הוא

$$a=\frac{d+e-f}{2},b=\frac{e+f-d}{2},$$
$$c=\frac{d+f-e}{2}$$

ולכן

$$a(u+v)+b(v+w)+c(w+u)=$$
$$du+ev+fw$$

. כיון שu,v,w תלויים, ונניח כי מקדמי התלות d,e,f לא כלם אפס. אז a,b,c הם מקדמי תלות של u+v,v+w,w+u. האם מקדמי התלות הם אפס? אז d+e-f=e+f-d=d+f-e=0 ומכאן נובע כי d=e=f=0. לכן גם המקדמים החדשים לא כלם אפס.
לכן הקבוצה החדשה תלויה.

3- ב- נביט על

$$a(u+v)+b(v+w)+c(w+u)=0$$

נפתח ונקבל מערכת משוואות:

$$a+c=0,a+b=0,b+c=0$$

ופתרונה הוא $a=b=c=0$ ולכן זו קבוצה בת"ל.

3-ג נביט על

$$a(u+v+w)+b(v+w)+cw=0$$

נפתח ונקבל מערכת משוואות:

$$a=0,a+b=0,a+b+c=0$$

ופתרונה הוא $a=b=c=0$ ולכן זו קבוצה בת"ל.

תשובה 4

א. דוגמא : הקבוצה $\{v,v,v,v\}$ לכל וקטור v.

ב. דוגמא ב-R^3 $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$.

ג. דוגמא ב-R^3 : $W=\{(1,0,0)\}$.