<u>מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב-מועד ב.</u>
<u>יום ו, יז אדר התשס"ו 17-3-2006</u>

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- מותרים מחשבונים
- יש לכתוב את התשובות לשאלות בטופס המבחן. יש לכתוב תשובות סופיות בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה והן משמשות כטיוטה.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 101 .

<u>נקוד חלקי</u>

- לחלק מהשאלות בחלק א, ולשאלה היחידה בחלק ב יש תשובות לנקוד חלקי.
- יתכן לצבור נקוד חלקי או בשיטת גאוס או בשיטה המבוססת על דטרמיננטים, אך לא בשתיהן.
- בכל תשובה או תשובה חלקית יש לכתוב תשובה סופית בלבד.

בהצלחה.

<u>חלק א- שאלות 1-7 מהן יש לבחור 6 שאלות. משקל כל שאלה 8 נקודות.</u>

<u>שאלה 1(8 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + ay + 3z = 3a \\ 4x + 5y + (2a+5)z = 18 \\ 6x + (3a+3)y + 15z = 10a+10 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

<u>תשובת ביניים</u>: (4 נקודות) ענה על <u>אחת (בלבד)</u> משתי השאלות הבאות:

<u>בינים 1</u>. באם פתרת לפי שיטת גאוס: כתוב את המערכת בשלב שבו יש שני אפסים בעמודה הראשונה.

<u>בינים 2</u>. באם פתרת על ידי דטרמיננט כתוב את det(A)

.

<u>תשובה מלאה (4 נקודות)</u>: ענה על כל השאלות הבאות: ענה תשובה סופית בלבד:
חלק מהערכים הנכונים של a יכולים להיות <u>שברים</u>.

מלאה 1: מהו/מהם הערכים של a עבורו/עבורם יש למערכת אינסוף פתרונות?
a=

מלאה 2: מהו/מהם הערכים של a עבורו/עבורם אין למערכת פתרונות?
a=

מלאה 3: מהו/מהם הערכים של a עבורו/עבורם יש למערכת פתרון יחיד?
a=

פתרון - על ידי שילוב של שיטת גאוס ודטרמיננט

נעבור למערכת משוואות מטריציאלית ונבצע פעולות אלמנטריות:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 3a \\ 4 & 5 & 2a+5 & 18 \\ 6 & 3a+3 & 15 & 10a+10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{s_2-4s_1\to s_2 \\ s_3-6s_1\to s_3}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 3a \\ 0 & 5-4a & 2a-7 & 18-12a \\ 0 & 3-3a & -3 & 10-8a \end{pmatrix} \to$$

$$\det(A) = -3(5-4a)-(2a-7)(3-3a) =$$

$$= -15+12a-(-6a^2+27a-21) = 6a^2-15a+6 =$$

$$= 3(2a^2-5a+2) = 3(a-2)(2a-1)$$

נשים לב כי ישנם שני ערכים של a אשר יגרמו להתאפסות הדטרמיננט. יש לבדק את שתי השורות האחרונות של המערכת עבור ערכים אלו.

$$\begin{pmatrix} 5-4a & 2a-7 & 18-12a \\ 3-3a & -3 & 10-8a \end{pmatrix}$$

נציב כל אחד מהם:

עבור a=2 נקבל את המטריצה

$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$, ולכן שתי השורות האחרונות הופכות זהות, ולכן יש למערכת אינסוף פתרונות.

עבור a=1/2 נקבל את המטריצה

$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 1.5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, ולכן שוב שתי השורות האחרונות הופכות זהות, ולכן שוב יש למערכת אינסוף פתרונות.

<u>שאלה 2 (8 נקודות)</u>

נתונה המטריצה הבאה שרכיביה שיכים לשדה Q.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 30 & 61 & 93 \\ 40 & 82 & 125 \end{pmatrix}$$

חשב במחברתך את A^{-1} .

<u>תשובת בינים</u>:(4 נקודות) ענה על <u>אחת (בלבד)</u> משתי השאלות הבאות:

ביניים 1. באם פתרת לפי שיטת גאוס עבור מטריצה 3x6, כתוב את המערכת בשלב שבו יש למטריצה 3x6 שני אפסים בעמודה הראשונה.

ביניים 2. באם פתרת לפי שיטת ה-adj(A), כתוב את det(A).

תשובה מלאה(4 נקודות): ענה תשובה סופית בלבד: כתב את A^{-1} :

פתרון : שלוב של פעולות אלמנטריות ושל דטרמיננטים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 61 & 93 & 0 & 1 & 0 \\ 40 & 82 & 125 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נכפל את השורה הראשונה ב-30 ונחסר מהשניה:נכפל את השורה הראשונה ב-40 ונחסר מהשלישית:

ולכן נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -30 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -40 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחסר את פעמים השורה השניה מהשורה השלישית ונקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -30 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

נחבר את השורה השלישית כפולה ב-3 לשורה הראשונה והשניה ואח"כ
נכפל את השורה השלישית ב- 1- ונקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 61 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 30 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

נכפל את השורה השניה ב- 2 ונחסר מהראשונה ואז נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 30 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

וקבלנו את ההפכית, כפי שקל לבדוק:

<u>שאלה 3(8 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מסדר 6x6 אשר מוגדרת על ידי הנוסחה: $A_{i,j}=|i-j|$
עבור $1\le i,j\le 6$. חשב במחברתך את det(A).

<u>תשובת בינים</u> (4 נקודות): כתוב כאן את המטריצה:

תשובה מלאה: (4 נקודות) הקף את התשובה הנכונה:

det(A)= א. 40 ב. -40. ג. 80 ד. -80 ה. 20 ו. -20

.

תשובה:נכתב את אברי המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נשתמש ב-1 כדי לאפס את העמודה הראשונה, ונקבל את המטריצה:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & -2 & -7 & -12 & -15 \\ 0 & 4 & -2 & -8 & -14 & -20 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע את הפעולה $S_1+S_3\rightarrow S_1$ ונציב במטריצה ונקבל:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & -2 & -7 & -12 & -15 \\ 0 & 4 & -2 & -8 & -14 & -20 \end{pmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שמאלית ואח"כ לפי שורה ראשונה ונקבל
det(A)=(-1)2det(D) עבור D הבאה.

$$D=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 \\ -2 & -6 & -8 & -10 \\ -2 & -7 & -12 & -15 \\ -2 & -8 & -14 & -20 \end{pmatrix}$$

נשתמש ב 2- העליון כדי לאפס את שאר העמודה השמאלית ונקבל

$$E=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{pmatrix}$$

ולכן: det(A)=(-1)2(-2)det(F) כאשר:

$$F=\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{pmatrix}$$

נוציא -5 גורם משותף ונקבל det(A)=(-1)2(-2)(-5)det(G) עבור

$$G=\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

נשתמש במספר 1 ונאפס כלפי מעלה ונקבל:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

נפתח ונקבל det(A)=(-1)2(-2)(-5)1(2)(2)=-80

<u>שאלה 4 (8 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{\begin{array}{llll} 8x & +16y & +24z & =1 \\ 39x & +5y & +47z & =2 \\ 70x & +141y & +283z & =3 \end{array}\right\}$$

נניח כי (x,y,z) הם פתרונות המערכת. מצא את השאריות של (x,y,z) בחלוקה ב-7 .

<u>תשובת ביניים</u>: (4 נקודות) ענה על <u>אחת (בלבד)</u> משתי השאלות הבאות:

<u>ביניים 1</u>. באם פתרת לפי שיטת גאוס: כתוב את המערכת בשלב שבו יש שני אפסים בעמודה הראשונה.

<u>ביניים 2</u>. באם פתרת על ידי שיטת קרמר, כתוב את הדטרמיננט:

.

תשובה מלאה(4 נקודות): ענה תשובה סופית בלבד:
כתוב כאן את התשובה הסופית.

פתרון:

כיון שמבקשים את שארית הפתרון בחלוקה ב-7, אפשר לעבור עם המערכת לעבודה ב-Z_7.

נקבל:

$$\begin{cases} 8 & 16 & 24 & 1 \\ 39 & 5 & 47 & 2 \\ 70 & 141 & 283 & 3 \end{cases} \xrightarrow[Z_7]{} \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{cases} \xrightarrow[S_2-4S_1]{} \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{cases} \xrightarrow[S_2+3S_3]{} \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{cases} \xrightarrow[S_3+2S_2]{S_1+3S_2}$$

$$\begin{cases} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{cases} \xrightarrow[Z_7]{S_1-2S_3}$$

$$\begin{cases} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{cases}$$

ולכן (x=2,y=3,z=0)mod 7.

<u>שאלה 5 (8 נקודות)</u>

מצא את כל המספרים z המקימים $z^8 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

תשובה: נשתמש בצורה קטבית:

$$R^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\rightarrow R=1,\tan(a)=\sqrt{3},a=\frac{4\pi}{3}$$

לכן נמצא שרש אחד:

$$R=1,\frac{a}{8}=\frac{\pi}{6},x+iy=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$$

נשים לב כי $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$ ולכן נוכל לכתב את כל השרשים:

$$cis(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, cis(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = cis(\frac{5\pi}{12}),$$

$$cis(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4}) = cis(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$cis(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = cis(\frac{11\pi}{12}),$$

$$cis(\frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{4}) = cis(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$cis(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = cis(\frac{17\pi}{12}), cis(\frac{17\pi}{12} + \frac{\pi}{4}) =$$

$$cis(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, cis(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = cis(\frac{23\pi}{12}),$$

$$cis(\frac{23\pi}{12} + \frac{\pi}{4}) = cis(\frac{\pi}{6})$$

<u>שאלה 6 (8 נקודות)</u>

נתונים ששה משתנים x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6, ונגדיר מטריצה A(6,6) על ידי
$A_{i,j}=x_i^{2j+1}$

<u>תשובת בינים</u> (4 נקודות): כתוב כאן את המטריצה:

<u>תשובה מלאה:</u> (4 נקודות) חשב את det(A).

תשובה:נכתב את אברי המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_1^3 & x_1^5 & x_1^7 & x_1^9 & x_1^{11} \\ x_2 & x_2^3 & x_2^5 & x_2^7 & x_2^9 & x_2^{11} \\ x_3 & x_3^3 & x_3^5 & x_3^7 & x_3^9 & x_3^{11} \\ x_4 & x_4^3 & x_4^5 & x_4^7 & x_4^9 & x_4^{11} \\ x_5 & x_5^3 & x_5^5 & x_5^7 & x_5^9 & x_5^{11} \\ x_6 & x_6^3 & x_6^5 & x_6^7 & x_6^9 & x_6^{11} \end{pmatrix}$$

נוציא x_1 גורם משותף משורה ראשונה, x_2 משורה שניה וכדומה ונקבל כי $det(A)= x_1x_2x_3x_4x_5x_6det(B)$ כאשר בכל מקום במטריצה B יושבת אותה חזקה כמו במטריצה A, אבל עם מעריך קטן באחד. המטריצה B היא מטריצת VDM עם המשתנים $x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2,x_5^2,x_6^2$ ולכן $det(B)=\prod(x_j^2- x_i^2)$ כאשר i<j.

<u>שאלה 7(8 נקודות)</u>

פתור את המשואה $2z^2+4(1+i)z+3i=0$.

תשובה:

$$= \frac{-4-4i\pm\sqrt{16(1+i)^2-4\cdot2\cdot3i}}{4} = \frac{-4-4i\pm\sqrt{16\cdot2i-24i}}{4} =$$

$$4-4i\pm\sqrt{8i} \over 4$$ $$= \frac{-4-4i\pm\sqrt{4}\sqrt{2i}}{4} = -1-i+\frac{\sqrt{2i}}{2}$$

נשים לב כי:

$$i = 2cis(\frac{\pi}{2}) \to \sqrt{2i} = \sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}+\pi) = \pm\sqrt{2}(\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = \pm(1+i)$$

ולכן:

$$z = -1-i+\frac{\sqrt{2i}}{2} = -1-i\pm\frac{1+i}{2} = (1+i)(-1\pm\frac{1}{2})$$

ואכן:

$$2(z+\frac{3}{2}(1+i))(z+\frac{1}{2}(1+i)) = 2z^2+4(1+i)+3i$$

כדרוש.

<u>חלק ב</u>

בחלק זה שאלה אחת . לשאלה יש חמש תשובות בינים של נקודה אחת כל אחת, וארבעה סעיפי תשובה מלאה של 3 נקודות כל אחת, סה"כ 17 נקודות.

<u>שאלה 8(17 נקודות)</u>

נתונה מטריצה רבועית A_n מסדר nxn אשר מוגדרת על ידי :

$$A_{i,j} = \begin{cases} 4 & i-j=0 \\ 3 & i-j=1 \\ 1 & i-j=-1 \\ 0 & |i-j|>1 \end{cases}$$

תשובות בינים: ענה על כל סעיפי הבינים:

בינים א (נקודה אחת). כתוב כאן את המטריצה A_4

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

בינים ב(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_1)$.

$\det(A_1)=4$

בינים ג(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_2)$.

$\det(A_2)=13$

ביניים ד(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_3)$. $\det(A_3)=40$

ביניים ה(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_4)$. $\det(A_4)=121$

מלאה א.(3 נקודות)

מצא a,b כך ש- $\det(A_n)=a\det(A_{n-1})+b\det(A_{n-2})$.

תשובה: נפתח את $\det(A_n)$ לפי עמודה שמאלית ונקבל כי $\det(A_n)=4\det(A_{n-1})-b\det(B)$. כאשר $B=A_{1,2}$ הוא המינור. כעת נפתח את B למי שורה ראשונה ונקבל כי $\det(B)=3\det(A_{n-2})$ ולכן $\det(A_n)=4\det(A_{n-1})-3\det(A_{n-2})$.

מלאה ב.(3 נקודות)

מצא c,d כך ש- $\det(A_n)=c\det(A_{n-1})+d$. (רמז: חשב את $\frac{\det(A_n)}{\det(A_{n-1})}$)

תשובה: נשים לב כי:

$$\frac{\det(A_2)}{\det(A_1)}=\frac{13}{4}=3+\frac{1}{4},\frac{\det(A_3)}{\det(A_2)}=\frac{40}{13}=3+\frac{1}{13},$$

$$\frac{\det(A_4)}{\det(A_3)}=\frac{121}{40}=3+\frac{1}{40},$$

ולכן לכל n מתקיים כי $\det(A_n)=3\det(A_{n-1})+1$

<u>מלאה ג.(3 נקודות)</u>

בטא את $\det(A_n)$ כפונקציה של n בלבד.

תשובה:

$\det(A_1)=4=1+3,$

$\det(A_2)=3(3+1)+1=3^2+3+1,\ \det(A_3)=3(3^2+3+1)+1=3^3+3^2+3+1$

לכן רואים כי $\det(A_n)$ הוא סכום של טור גיאומטרי:

$\det(A_n)=3^n+\ldots+3+1=0.5(3^{n+1}-1)$

<u>מלאה ד.(3 נקודות)</u>

נביט במערכת $A_nv=b$ כאשר A_n הוגדרה בתחילת השאלה

$b=(1,0,\ldots,0)^T$ ו- $v=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$. כתוב את x_1 כפונקציה של n .

לפי משפט קרמר $x_1=\det(A_{n,1})/\det(A_n)$ כאשר המטריצה שהדטרמיננט שלה במונה מתקבלת מ-A_n על ידי החלפת העמודה הראשונה ב-v . על ידי פתוח לפי עמודה ראשונה קל לראות כי הדטרמיננט שבמונה שווה ל- $\det(A_{n-1})$ ולכן

$x_1=(3^n-1)/(3^{n+1}-1)$

<u>חלק ג</u>

בחלק זה ארבע שאלות בנות 4 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה.

<u>שאלה 9 (4 נקודות)</u>

נתונות מטריצות A, B רבועיות מסדר n. אז $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$

תשובה כן לא

תשובה: לא כי אם $A=B=I$ אז $\det(A)=\det(B)=1, \det(A)+\det(B)=2$ אבל $\det(A+B)=2^n$ השונה מ-2 אם $n>1$.

<u>שאלה 10 (4 נקודות)</u>

יש אינסוף מספרים שלמים z כך ש $z=3 \pmod 6$, ו $z=1 \pmod 3$.

תשובה כן לא

תשובה: לא כי אם ל-z שארית 3 בחלוקה ב-6, אז השארית שלו בחלוקה ב-3 היא 0.

<u>שאלה 11 (4 נקודות)</u>

נתונות מטריצות B,A מממד (3,3) ונתון כי $\det(B)=8\det(A)$. אז נובע כי $B=2A$.

תשובה כן לא

לא דוגמא נגדית $A=I_3$, B מטריצה אלכסונית ועל האלכסון שלה יש 8,1,1.

שאלה 12 (4 נקודות)

נתונים מטריצה A וקטורים v,w,b השונים מ-0 כך שמתקיימות המשוואות $Av=b,Aw=0$. אז מתקיימת המשוואה $A(w-v)=b$.

תשובה כן לא

לא, כי $A(w-v)=Aw-Av=0-b=-b$.

חלק ד- שאלת נסוח.

שאלה 13(10 נקודות)

נסח את כל טענות העזר עליהן מסתמכת הוכחת המשפט (כפי שהוכחנו בכתה) האומר כי A מטריצה הפיכה אם ורק אם $\det(A)\neq 0$.

חלק ה- שאלת הוכחה

שאלה 14(10 נקודות)

הוכח כי אם A מטריצת $VDM(x_1,\ldots,x_n)$ אז הדטרמיננט שלה הוא מכפלת הפרשי הפרמטרים.$i\neq j$. מותר להסתמך על טענות עזר, אבל יש לנסח אותן במדויק.