המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. אלגברה לינארית,

סמסטר ב',מועד א התשס"ו. יום ב, ו אב התשסו 31-7-2006

המרצה: ד"ר גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.

משך המבחן: 2.5 שעות

בהצלחה

חלק א. בחלק זה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

1. נתונים שני תתי המרחבים של $\mathbb{R}^3$ שיסומנו U ו V כאשר.

$$U = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}, V = Sp\left\{\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס של $U \cap V$, תשובה:

מצא בסיס של $U + V$: תשובה:

2. נתונה המטריצה הבאה A התלויה בפרמטר k .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & k & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & k \end{pmatrix}$$

מצא תנאי על הפרמטר שיבטיח כי מרחב הפתרונות של המערכת Av=0 יהיה בעל מימד מקסימלי :

התנאי הוא:

3. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} u+2v+3w+x+y=0 \\ u-v+w-x+y=0 \\ u+5v+5w+3x-3y=0 \end{cases},$$

אז מרחב הפתרונות של ה נפרש ע"י קבוצת הוקטורים:

א. $\vec{a}_1=(-1,2,0,-3,0), \vec{a}_2=(-2,0,1,-1,0), \vec{a}_3=(0,0,0,1,1)$.

ב. $\vec{a}_1=(-1,2,1,0,0), \vec{a}_2=(1,0,0,1,0), \vec{a}_3=(0,2,1,1,1)$.

ג. $\vec{a}_1=(-1,6,2,2,1), \vec{a}_2=(0,2,1,1,0), \vec{a}_3=(-1,4,1,1,1)$.

ד. $\vec{a}_1=(-1,4,1,1,1), \vec{a}_2=(0,2,1,1,0), \vec{a}_3=(-1,2,1,0,0)$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנ"ל איננה פורשת את מרחב הפתרונות.

4. נתונה העתקה לינארית $L:\mathbf{M}_2(\mathbf{R})\to\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה

$$L\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

חשב את $\dim(\operatorname{Im}(L))$:

התשובה היא:

5. נתונה המטריצה

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ 7 & -5 & -1 \\ 6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

חשב את הערכים העצמיים שלה:

התשובה היא:

6. נתון הוקטור (18,21,20) ונתון הבסיס (1,2,3),(4,5,6),(7,8,8) של R^3. מצא את הקואורדינטות של הוקטור ביחס לבסיס זה:

הקואורדינטות הן:

a= ,b= , c=

7. נתונה המטריצה של ההעתקה הלינארית $L:R^2\to R^2$ בבסיס הסטנדרטי והיא שווה ל- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, חשב את המטריצה של אותה העתקה בבסיס $\vec{f}_1=(4,1)$ $\vec{f}_2=(7,2)$.

התשובה היא:

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא".

משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות. יש לבחור 7 שאלות מתוך 9.

8. נתונות קבוצות B={b1,…,bk} ו- C={c1,…,cn} כך שB ו-C הם וקטורים בת"ל. מכאן נובע כי $B \cup C$ היא תמיד קבוצת וקטורים ת"ל.

לא	כן

9. מטריצת-המעבר מהבסיס E לבסיס F מעל R מכילה מספרים חיוביים בלבד. מכאן נובע שמטריצת-המעבר מהבסיס F לבסיס E מכילה מספרים חיוביים בלבד.

לא	כן

10. נתון כי הוקטורים $3\vec{f}_1+3\vec{f}_2-\vec{f}_3,\ 2\vec{f}_1+\vec{f}_2,\ 3\vec{f}_1+\vec{f}_3$ פורשים את המרחב V. מכאן נובע כי הוקטורים $\vec{f}_1+2\vec{f}_2-\vec{f}_3,\ \vec{f}_1-\vec{f}_2+\vec{f}_3$ גם הם פורשים את V.

לא	כן

11. נתון כי $f:V\to W$ וכי $g:W\to U$ הן העתקות וכי ההרכבה $gf:V\to U$ היא לינארית. מכאן נובע כי f חיבת להיות לינארית.

כן	לא

12. למדנו בכתה כי שדה הממשיים $V=R$ הוא מרחב וקטורי מעל הרציונלים Q. האם הוא בעל ממד סופי.

כן	לא

13. $Sp(\ (1,2,3,4),(1,1,-1,1)\ ) \subseteq Sp(\ (4,2,4,10),(3,3,5,9)\ )$.

כן	לא

14. נתונה $L:U\to U$ העתקה לינארית חד-חד-ערכית. מכאן נובע כי L היא על.

כן	לא

15. נתונים V_1, V_2, V_3 שלושה תת-מרחבים של מרחב וקטורי V המקיימים: $V_1 \cap V_2 = V_3$.
מכאן נובע כי $\dim(V_1) > \dim(V_3)$.

כן	לא

16. למדנו בכתה על המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הרציפות $C[a,b]$ מעל R .
ונביט באוסף הפולינומים P. אז P היא בסיס (אינסופי)של $C[a,b]$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

משקל כל הוכחה 10 נקודות.

17 הוכח את המשפט כי אם $L:U\rightarrow V$ העתקה לינארית אז

$\dim(\ker(L))+\dim(\mathrm{Im}(L))=\dim(U)$.

18. הוכח כי אם W,U תתי מרחב של V, אז

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

.

בהצלחה !

תשובות לשאלות:

1. נחשב את U ואת V ואז נוכל לבצע בהם חתוך וסכום.

$$\begin{pmatrix}1&4&a\\2&5&b\\3&6&c\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&4&a\\0&-3&b-2a\\0&-6&c-3a\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}$$
$$\begin{pmatrix}1&4&a\\0&-3&b-2a\\0&0&c-3a-2b+4a\end{pmatrix}$$

ולכן המשוואה המאפינת את U היא a+c-2b=0. נבצע את אותו תהליך עבור V.

$$\begin{pmatrix}7&2&a\\8&3&b\\9&4&c\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&1&b-a\\8&3&b\\9&4&c\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-9S_1\to S_3]{S_2-8S_1\to S_2}$$
$$\begin{pmatrix}1&4&b-a\\0&-5&b-8b+8a\\0&-5&c-9b+9a\end{pmatrix}$$

ולכן המשוואה המאפינת את V היא b-8b+8a=c-9b+9a או בצורה שקולה c-2b+a=0. כלומר

U=V ולכן גם U+V,U∩V שוים לU, ולכל המרחבים אותו בסיס למשל

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$$

2. נפעל פעולות שורה אלמנטריות על A ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & k & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3 - S_1 \to S_3]{S_2 - S_1 \to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k-2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & k-4 \end{pmatrix}$$

כדי שלמרחב הפתרונות $(Ker(L_A))$ יהיה ממד מקסימלי , על ממד העמודות להיות מינימלי, וזה יקרה רק כאשר שתי השורות האחרונות פרופורציוניות. השורה השניה חיבת להיות פי 2 מהשורה השלישית, ולכן k-2=2 כלומר צריך להתקים k=4 ולעומת זאת 2(k-4)=2 שפתרונה הוא k=5. לכן עבור כל k ממד Ker(L) הוא 1 ולא 2.

3. נפתח את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} u+2v+3w+x+y=0 \\ u-v+w-x+y=0 \\ u+5v+5w+3x-3y=0 \end{cases}$$

למטריצה ונעשה פעולות שורה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3/(-4)\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-S_3\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2/(-2)\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1.5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-S_2\to S_2]{S_2+S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן, $u=-0.5v-2w,\ x=-1.5v-w, y=0$ ולכן פתרון אפשרי הוא

$$\begin{pmatrix} -0.5v-2w \\ v \\ w \\ -1.5v-w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5v \\ v \\ 0 \\ -1.5v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w \\ 0 \\ w \\ -w \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 0.5v \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ובסיס אפשרי הוא (-1,2,0,-3,0),(-2,0,1,-1,0)

4. $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+6y \\ z+3w & 2z+6w \end{pmatrix}$ ולכן כל אבר ב-Im(L) תלוי בעמודה השמאלית, ולכן dim(Im(L))=2.

5. נחשב את הפולינום האפיני של $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ 7 & -5 & -1 \\ 6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\det\begin{pmatrix} 6-x & -4 & -1 \\ 7 & -5-x & -1 \\ 6 & -4 & -1-x \end{pmatrix} = (6-x)(5+x)(1+x)+24+28-6(5+x)-28(1+x)-4(6-x) =$$
$$= (6-x)(x^2+6x+5)+24+28-30-6x-28-28x-24+4x =$$
$$= 6x^2+36x+30-x^3-6x^2-5x-30x-30 = -x^3+0x^2+x+0 = -x^3+x = -x(x-1)(x+1).$$

ולכן הערכים העצמיים הם 0,1,-1.

6. נחשב את המקדמים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 18 \\ 2 & 5 & 8 & 21 \\ 3 & 6 & 8 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -13 & -34 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2-6S_3\to S_2]{S_1+7S_3\to S_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -10 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2/(-3)\to S_2]{S_3/(-1)\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-4S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ולכן המקדמים הם a=2,b=-3,c=4.

7. נתון כי $B=\{(4,1),(7,2)\}$ וכי $E=\{(1,0),(0,1)\}$. אז ${}_B[T]_E=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. אז גם $\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

${}_E[T]_B =$

ולכן המטריצה הרצויה היא

$$\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19 & -28\\ 11 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19 & -189\\ 58 & 105\end{pmatrix}$$

8. התשובה היא לא, דוגמא נגדית $B=\{e1\},C=\{e2\}$.

9. התשובה היא לא. כיון שכל מטריצת מעבר היא הפיכה וכל הפיכה היא מטריצת מעבר, מספיק להראות כי הפוכה של מטריצה עם איברים חיוביים מעל R מכילה גם מספרים שליליים. ואכן, עבור $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ מתקים כי $A^{(-1)}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

10. התשובה היא כן. נביט במטריצה:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3 & 2\\ 0 & -3 & -3 & -6 & -3\\ 0 & 2 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3/2\to S_3]{S_2/(-3)\to S_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

ולכן שתי העמודות הראשונות פורשות את הקבוצה הפורשת המרכבת משלשת הוקטורים.

11. התשובה לא. נבחר $F=V=U=W=R$ וכן $f=g=1/x\ x\square 0,f(0)=g(0)=0$ אז gf היא העתקת הזהות, והיא לינארית אבל f,g אינן לינאריות.

12. התשובה היא לא. אין קבוצה סופית של מספרים אי-רציונליים שפורשת מעל Q את כל האירציונלים.

13. נביט במטריצה ונדרג.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 10 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-4S_1\to S_4]{S_2-2S_1\to S_2, S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-3S_2\to S_4]{S_3-4S_2\to S} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

ולכן התשובה היא לא.

14.כן, כיון שאם L חח"ע אז dim(Ker(L))=0 ולכן dim(Im(L))=dim(U) ולכן L על.

15. לא, כיון שיתכן כי $V_1=V_2=V_3$ ואז יתקים שויון.

16. לא, הפולינומים תלויים לינארית וכמו כן, כל צרוף לינארי של פולינומים הוא פולינום, ולעולם לא נקבל אף פונקציה אחרת.