NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. אלגברה לינארית,

סמסטר ב',מועד ב התשס"ו. יום ב, יח אלול התשסו 11-9-2006

המרצה: ד"ר גיורא דולה, המתרגל: רענן שכטר.

משך המבחן: 2.5 שעות

בהצלחה

חלק א. בחלק זה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

1. נתונים שני תתי המרחב של R^3 שיסומנו U ו V כאשר.

$$U = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}, V = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא בסיס של $U \cap V$, תשובה:

ב. מצא בסיס של $U + V$: תשובה:

2. נתונה המטריצה הבאה A התלויה בפרמטר k .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 4 \\ 2 & 1 & 4 & k \\ 1 & 2-k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

א. רשום את A לאחר דרוג כלפי מטה.

ב. מצא תנאי על הפרמטר שיבטיח כי <u>מרחב הפתרונות</u> של המערכת Av=0 יהיה בעל מימד מקסימלי :

התנאי הוא:

3.נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

א. רשום את הפולינום האפיני של A

ב. חשב את הערכים העצמיים שלה ואת הוקטורים העצמיים הצמודים להם:

התשובה היא:

4. נתונים הבסיסים הבאים של R^3 :

$$U=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$V=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

א. רשום את הקואורדינטות של u_1 בבסיס V.

ב. רשום את הקואודינטות של u_2 בבסיס V.

ג. רשום את הקואודינטות של u_3 בבסיס V.

ד.רשום את מטריצת המעבר ${}_VT_U$.

5. נניח כי $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ ו-X היא מטריצה 2x2, ונגדיר העתקה לינארית

$L_A:M_2(R)\rightarrow M_2(R)$ על ידי: $L(X)=L_A(X)=AX-XA$.

א. עבור X כלשהיא בטא את L(X).

ב. כתוב את המטריצות X כך ש- L(X)=0.

ג. כתוב את Im(L).

ד. כתוב מהו dim(Ker(L)).

ה. כתוב מהו dim(Im(L)).

6. נתון כי

$$A=\left\{\begin{pmatrix}13\\17\\21\end{pmatrix},\begin{pmatrix}18\\24\\30\end{pmatrix}\right\} \text{ וכי } B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\y\end{pmatrix}\right\} \text{ וכי } {}_BT_A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

א. כתוב מערכת משוואות ש- x ו-y צריכים לקיים.

ב. מצא את - x ואת-y:

7. **נתונה** המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\2&7&1&4\\3&9&3&5\end{pmatrix}$$

א. רשום את A לאחר דרוג כלפי מטה.

ב. רשום את צורת המדרגות הקנונית של A.

ג. רשום בסיס למרחב הוקטורי של פתרונות המערכת $Av=0$.

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות. יש לבחור 7 שאלות מתוך 9.

8. אם מטריצת המעבר ${}_AT_B$ מכילה רק מספרים רציונליים, אז מטריצת המעבר ${}_BT_A$ מכילה רק מספרים רציונליים

כן	לא

9. נתון כי $f{:}V\to W$ וכי $g{:}W\to U$ הן העתקות לינאריות וכי ההרכבה $gf{:}V\to U$ היא העתקה חח"ע. מכאן נובע כי g חיבת להיות העתקה חח"ע.

כן	לא

10. נתון כי הוקטורים $\vec{f}_1+2\vec{f}_2+3\vec{f}_3,\ 4\vec{f}_1+5\vec{f}_2+6\vec{f}_3,\ 7\vec{f}_1+8\vec{f}_2+8\vec{f}_3$ פורשים את המרחב V. מכאן נובע כי הוקטורים $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3$ גם הם פורשים את V.

כן	לא

11. נתון כי $L:V \to V$ היא פונקציה חח"ע ועל. מכאן נובע כי L חיבת להיות העתקה לינארית.

כן	לא

12.האם קבוצת הרציונלים Q היא מרחב וקטורי מעל Z_3.

כן	לא

13. נביט על $C[0,2]$ מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[0,2]$, ועל תת הקבוצה $A = \{ f \in C[0,2], f(1) = 0\}$. אז A היא תת מרחב.

כן	לא

14. שלשה וקטורים $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ הם תלויים לינארית אם ורק אם קימים שנים מביניהם שהם פרופורציונליים. (כלומר קים סקלר כך שאחד שוה לשני כפול סקלר זה).

כן	לא

15. נתונה מטריצה A בעלת פולינום אפיני $(x-1)(x+1)^2$. מכאן נובע כי A לכסינה .

כן	לא

16. קימת מטריצה ממשית מסדר 2x2 בעלת שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

משקל כל הוכחה 10 נקודות.

17 הוכח את המשפט: נתון כי $\dim(V)=n$ וכי $S=\{s_1,\ldots,s_n\}$ קבוצת וקטורים ב-V. הטענות הבאות שקולות: א. S בת"ל. ב. S פורשת. ג. S בסיס.

18. הוכח כי אם W,U תתי מרחב של V, אז

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

בהצלחה !

תשובות לשאלות:

1. נחשב את u ואת v ואז נוכל לבצע בהם חתוך וסכום.

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & a\\ 2 & 5 & b\\ 3 & 6 & c\end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix}1 & 4 & a\\ 0 & -3 & b-2a\\ 0 & -6 & c-3a\end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 4 & a\\ 0 & -3 & b-2a\\ 0 & 0 & c-3a-2b+4a\end{pmatrix}$$

ולכן המשוואה המאפינת את U היא a+c-2b=0. נבצע את אותו תהליך עבור V.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 0 & 1 & b\\ -1 & 1 & c\end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+S_3\to S_3} \begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & -1 & a+c\end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+S_3\to S_3}$$
$$\begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & a+b+c\end{pmatrix}$$

ולכן המשוואה המאפינת את V היא c+b+a=0. ולכן בחתוך, a+c=2b, a+c=-b כלומר בחתוך 2b=-b ולכן 3b=0 או b=0. המשוואה הנוספת הופכת להיות a+c=0 ולכן נקבל בסיס של החתוך (1,0,-1). האחוד הוא כל R^3 ולכן למשל הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס לסכום.

2. נפעל פעולות שורה אלמנטריות על A ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 4 \\ 2 & 1 & 4 & k \\ 1 & 2-k & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 4 \\ 0 & -3 & 4-2k & k-8 \\ 0 & -k & 1-k & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{kS_2-3S_3\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 4 \\ 0 & -3 & 4-2k & k-8 \\ 0 & 0 & 2k^2-7k+3 & -k^2+8k-15 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל משואה $(2k-1)(k-3)z=-(k-3)(k-5)$.

כדי שלמרחב הפתרונות $(Ker(L_A))$ יהיה ממד מקסימלי , על השורה השלישית למתאפס,

ולכן צריך להתקים $k=3$

3. נחשב את הפולינום האפיני

$$\det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ -4 & 1-x & 2 \\ -4 & -7 & 8-x \end{pmatrix} = -x((1-x)(8-x)+14)-(4(x-8)+8) = -x(x^2-9x+22)-(4x-24) =$$
$$= -x^3+9x^2-26x+24 = -(x-2)(x-3)(x-4).$$

נחשב את הוקטורים העצמיים:

עבור $\lambda=2$ נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -0 \\ -4 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+3S_1\to S_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{S_2/3\to S_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן וקטור עצמי הצמוד לעע $\lambda=2$ הוא $(1,2,3)$.

עבור $\lambda=3$ נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&-2&2\\-4&-7&5\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_1-S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&3&-2\\-4&-2&2\\0&-5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2+4S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&10&-5\\0&-5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{2S_3+S_2\to S_3}\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&-5&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2/(-5)\to S_2}\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&1&-3/5\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-3S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&-1/5\\0&1&-3/5\end{pmatrix}$$

ולכן וקטור עצמי הצמוד לעע $\lambda=2$ הוא (0.2,0.6,1). או טוב יותר (1,3,5).

עבור $\lambda=4$ נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix}-4&1&0\\-4&-3&2\\-4&-7&4\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&-4&2\\0&-8&4\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3}\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2/2\to S_2}\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

ולכן וקטור עצמי הצמוד לעע $\lambda=2$ הוא (0.25,1,0.5). או טוב יותר (1,4,2).

.4

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=b_1-b_2.$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=b_1-b_3.$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=b_1.$$

ולכן:

$${}_BT_A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

שאלה 5

ולכן: L(X)=AX-XA

$$L(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\a+c&b+d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+b&a+b\\c+d&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c-b&d-a\\a-d&b-c\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$L(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}c-b&d-a\\a-d&b-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow b=c,d=a.$$

ולכן Ker(L) היא אוסף המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}.$ וממד תת המרחב הוא 2.

נשים לב כי Im(L) הן כל המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix}x&y\\-y&-x\end{pmatrix}.$, וזהו תת מרחב בעל ממד 2.

תשובה 6. לפי הנתון $A=\left\{\begin{pmatrix}13\\17\\21\end{pmatrix},\begin{pmatrix}18\\24\\30\end{pmatrix}\right\}$ וכי $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\y\end{pmatrix}\right\}$ וכי ${}_BT_A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

ולכן נקבל את המשוואות:

$\begin{pmatrix}13\\17\\21\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\2\\x\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}4\\5\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}18\\24\\30\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\x\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}4\\5\\y\end{pmatrix}.$ ולכן נקבל מערכת משוואות: $\begin{cases}x+3y=21\\2x+4y=30\end{cases}$

ופתרונה x=3,y=6.

תשובה 7

נפתח את מערכת המשוואות:

$A=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\2&7&1&3\\3&9&3&5\end{pmatrix}$ למטריצה ונעשה פעולות שורה:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&5\\2&7&1&4\\3&9&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-3S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&3&-5&-6\\0&3&-6&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&3&-5&-6\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2-5S_3\to S_2]{S_1+3S_3\to S_1}\begin{pmatrix}1&2&0&-4\\0&3&0&9\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3/(-1)\to S_3]{S_2/3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-4\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1-2S_2\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&-10\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

ולכן אבר של Ker(A) הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10w \\ -3w \\ -3w \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 8}.

אם ${}_A T_B$. מכילה רציונליים, אז הפוכתה ${}_B T_A$. גם היא מעל Q.

תשובה 9

התשובה היא לא. דוגמא נגדית: $f(x)=(x,x), g(x,y)=y, U=W=R, V=R^2$, אז $gf(x)=x$ היא חח"ע, g אינה חח"ע, וההעתקות הן לימאריות.

תשובה 10

. התשובה היא כן. נביט במטריצה: נכתב את הוקטורים $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ בעמודות ונקבל מטריצה F. הנתון הוא כי מכפלת המטריצות $F\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ היא הפיכה. כיון שגם $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ הפיכה, אז גם F הפיכה כמכפלת הפיכות.

ולכן שתי העמודות הראשונות פורשות את הקבוצה הפורשת המרכבת משלשת הוקטורים.

11. התשובה לא. $f=:x^3:R\to R$ היא דוגמא נגדית.

12. התשובה היא לא. כי אז 1 של Z_3 צריך לכפול את 1 של Q. התוצאה אמורה להיות מספר רציונלי a כך 3a=0 ולכן נובע כי a=0 שתירמ לאקסיומות כפל בסקלר.

13. התשובה היא כן: אם f(1)=g(1)=0 אז (f+g)(1)=f(1)+g(1)=0+0=0.

14. לא, למשל הוקטורים (1,0),(0,1),(1,1) הם תלויים לינארית, אבל אף שנים מהם אינם פרופורציוניים.

15. לא, למשל למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ישנו הפולינום האפיני $(x-1)(x+1)^2$, אבל יש לה רק שני וקטורים עצמיים: (1,0,0) אשר צמוד ל $\lambda=1$, ו- (0,1,0) אשר צמוד ל $\lambda=-1$

16. כן, למשל למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ יש שני וקטורים עצמיים, (1,0) אשר צמוד ל $\lambda=2$ ו- (0,1) אשר צמוד ל $\lambda=3$.