מטריצת מעבר מבסיס לבסיס

נתון הבסיס הבא של R^3 :

$$B=\{b_1=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\}$$

, נבדק

כי זהו בסיס על ידי כך שנבדק את דרגת המטריצה שעמודותיה הן אברי הבסיס. אבל הדטרמיננטה שלה היא 3- ולכן זהו אכן בסיס.

נתון עוד בסיס

$$C=\{c_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\}$$

נבדק כי גם זה בסיס על ידי שנכתב את איבריו כעמודות מטריצה ונבדק את דרגתה:

$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-S_1\to S_3}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-1&1\\0&-3&-2\end{pmatrix}$$

הדטרמיננט של מטריצה זו הוא 5 ולכן היא הפיכה, ולכן גם המקורית, ולכן B בסיס.

כעת נמצא את ${}_C[M]_B$, מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C.

יש לבטא את b_1 כצרוף לינארי של אברי הבסיס C, כלומר לפתור מערכת משוואות

$b_1 = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3$ אחר כך יש לפתור מערכת כזו עבור b_2 ואח"כ עבור b_3, כלומר,נוכל לפתור את 3 המערכות בפעם אחת עם מטריצה 3x6, שבה החצי השמאלי הם המקדמים, כלומר עמודות C, ושבו החצי הימני הם האיברים החפשיים כלומר עמודות B, ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 - S_1 \to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 + 3S_2 \to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2 - S_3 \to S_2]{S_1 - S_3 \to S_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -7 & -8 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-S_2 \to S_2]{S_1 - 2S_2 \to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

ולכן

$${}_C M_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

נביט בוקטור: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

נבטא את הרכיבים שלו בבסיס B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = xb_1 + yb_2 + zb_3 = x\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + yb_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+S_1\to S_3]{S_2+2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+3S_3\to S_2]{-S_1\to S_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3+2S_2\to S_3]{S_2/(-3)\to S_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן רכיבי v בבסיס B הם (-1,1,-1).

כעת נבטא את אותו וקטור בבסיס C.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1-2S_2\to S_1]{S_3+3S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-S_3\to S_2]{S_1+S_3\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

ולכן רכיבי v בבסיס C הם (-2,-5,-7).

וכעת:

$$({}_C M_B)[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} = [v]_C$$