יום ה, כח כסלו התשס"ו 29-12-2005 מבחן אמצע באלגברה לינארית

מורה: גיורא דולה. מותרים מחשבונים. משך המבחן הוא שעתים.

התשובות לשאלות הן בטופס המבחן. יש לכתוב תשובה סופית בלבד.
מחברות המבחן לא תבדקנה.

במבחן הציון המקסימלי הוא 100 .

במבחן 3 שאלות.

שאלה 1 בת 2 סעיפים, משקל הסעיף הראשון 10 נקודות והסעיף השני 20 נקודות.

שאלה 2 בת 2 סעיפים, משקל הסעיף הראשון 10 נקודות והסעיף השני 20 נקודות.

שאלה 3 בת 8 סעיפים ומשקל כל סעיף 5 נקודות .

בהצלחה.

שאלה 1

טור א

מצא את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

חלק א- כתוב כאן את מערכת המשואות בלבד-ללא פתרון.

חלק ב- כתוב כאן את כל המטריצות האפשריות אל תכתב את חשובי הבינים.

תשובה:

נסמן את הרכיבים של המטריצה באותיות ונקבל ארבע משואות עם 4 נעלמים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

נבצע את הכפל:

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+4z & 3y+4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3w & 2z+4w \end{pmatrix}$$

ונקבל 4 משוואות עם ארבעה נעלמים:

$$\begin{cases} 2z-3y=0 \\ 2w-2x-3y=0 \\ 3x+3z-3w=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

וזוהי התשובה המלאה לחלק הראשון.
נשים לב כי המשוואות הראשונה והרביעית הן כפולה זו של זו ולכן נותרו שלש משוואות. את המשוואה השלישית נחלק ב-3 ונשים להיות ראשונה, ונקבל אם כך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[s_3+2s_1 \to s_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן גם המשוואה השלישית מיותרת. נבחר את Y להיות באלכסון ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[s_2/-3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן z,w הם פרמטרים, x=w-z,y=2z/3 ואכן כל מטריצה כזו מקימת את הרצוי.

טור ב

מצא את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

חלק א- כתוב כאן את מערכת המשואות בלבד-ללא פתרון.

חלק ב- כתוב כאן את כל המטריצות האפשריות

תשובה: כיון שהמטריצה הנתונה היא המשוחלפת של זו של טור א, גם התוצאה יוצאת המשוחלפת.

שאלה 2

טור א

נתונה מטריצה רבועית nxn . נסמן $A\bullet A=A^2,\ A\bullet A^2=A^3,\ A\bullet A^k=A^{k+1}$

נתון כי $A^2=3A-2I_n$.

א. בטא את A^3 על ידי A ו- I_n בלבד.

ב. הוכח באינדוקציה על k כי מתקים לכל k כי :

$A^k=(2^k-1)A-(2^k-2)I_n$.

הוכחה:

$A^2=3A-2I_n \rightarrow A^3=3A^2-2A=3(3A-2I_n)-2A=9A-6I_n-2A=7A-6I_n$

$A^3=7A-6I_n \rightarrow A^4=7A^2-6A=7(3A-2I_n)-6A=21A-14I_n-6A=15A-14I_n$

$A^k=(2^k-1)A-(2^k-2)I_n \rightarrow A^{k+1}=(2^k-1)A^2-(2^k-2)A= =(2^k-1)(3A-2I_n)-$
$(2^k-2)A=3(2^k-1)A-(2^{k+1}-2)I_n-(2^k-2)A=(3\bullet 2^k-3-2^k+2)A-(2^{k+1}-2)I_n$
$=(2^{k+1}-1)A-(2^{k+1}-2)I_n.$

טור ב

נתונה מטריצה רבועית nxn . נסמן $A\bullet A=A^2,\ A\bullet A^2=A^3,\ A\bullet A^k=A^{k+1}$

נתון כי $A^2=4A-3I_n$.

א. בטא את A^3 על ידי A ו- I_n בלבד.

ב. הוכח באינדוקציה על k כי מתקים לכל k כי :

$A^k=0.5[(3^k-1)A-(3^k-3)I_n]$.

הוכחה:

$A^2=4A-3I_n \rightarrow A^3=4A^2-3A=4(4A-3I_n)-3A=16A-12I_n-3A=13A-12I_n$

$A^3=13A-12I_n \rightarrow A^4=13A^2-12A=13(4A-3I_n)-12A=52A-39I_n-$
$12A=40A-39I_n$

$A^k=0.5[(3^k-1)A-(3^k-3)I_n] \rightarrow A^{k+1}=0.5[(3^k-1)A^2-(3^k-3)A]=$
$0.5[(3^k-1)(4A-3I_n)-(3^k-3)A]=0.5[(4\bullet 3^k-4-3^k+3)A-(3^{k+1}-3)I_n)]=$
$0.5[(3^{k+1}-1)A-(3^{k+1}-3)I_n)].$

שאלה 3

נתונות 3 מטריצות nxn שתסומנה A,B,C. השתמש בסימן ה $\sum$ וכתב בצורה כללית את האיברים הבאים: תן תשובה סופית בלבד.

א. $(AB)_{1,1}$.

$$\sum_{q=1}^{n} a_{1,q} b_{q,1}$$

ב. $(AB)_{1,2}$.

$$\sum_{q=1}^{n} a_{1,q} b_{q,2}$$

ג. $(AB)_{1,k}$. עבור איזשהוא k.

$$\sum_{q=1}^{n} a_{1,q} b_{q,k}$$

ד. $((AB)C)_{1,1}$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} a_{1,q} b_{q,k}\right) c_{k,1}$$

ה. $(BC)_{1,1}$.

$$\sum_{q=1}^{n} b_{1,q} c_{q,1}$$

ו. $(BC)_{2,1}$.

$$\sum_{q=1}^{n} b_{1,q} c_{q,1}$$

ז. $(BC)_{k,1}$. עבור איזשהוא k.

$$\sum_{q=1}^{n} b_{k,q} c_{q,1}$$

ח. $(A(BC))_{1,1}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \left(\sum_{q=1}^{n} b_{k,q} c_{q,1}\right)$$