<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית,
סמסטר ב',מועד א .תשנ"ח.
המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.

-

חלק א. בחלק זה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

1. אם x, y שני פתרונות של הממ"ל:

$$\begin{cases} ix + (1+i)y = 2 + 2i \\ 2ix + (3+2i)y = 5 + 3i \end{cases}$$

אזי $x + y$ שווה ל:

א. $1-3i$. **ב.** $3+i$. **ג.** $3-i$. **ד.** $-1-3i$. **ה.** $-1+3i$

התשובה הנכונה היא:	

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני מרחבים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,1),(1,1,\text{-}1),(1,3,3)\ ),\ V = \mathrm{Sp}(\ (1,2,2),(2,3,1)\ )$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

3. מרחב הפתרונות של מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

יהיה בעל מימד מקסימלי אם ורק אם :

א. $k = 1$.
ב. $a \neq 2$.
ג. $k \neq 1$.
ד. $a = 2$.
ו. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

4. מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

נפרש ע"י קבוצת הוקטורים:

א. $\vec{a}_1 = (1,2,2,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ב. $\vec{a}_1 = (1,1,-1,-1), \vec{a}_2 = (2,2,-2,-2)$.

ג. $\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ד. $\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,2,1)$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנ"ל איננה פורשת את מרחב הפתרונות.

5. אם העתקה לינארית $L:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ מוגדרת ע"י הנוסחה

$$L((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_3 - x_4),$$

אז $\mathrm{Ker}(L)$ שווה ל:

א. 3.

ב. 2.

ג. 1.

ד. 4.

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

6 . מספר הערכים העצמיים (השונים) של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

שווה ל:

א. 3

ב. 2

ג. 1

ד. 0

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

התשובה הנכונה היא:	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות. יש לבחור 9 שאלות מתוך 11.

7. סכום הקואורדינטות של הוקטור (4,6-,2) בבסיס $\vec{e}_3=(1,0,0)$, $\vec{e}_2$=(1-,0,1) $\vec{e}_1=(0,1,1)$ שווה ל-3-.

כן	לא

8. אם מתוך שלושה וקטורים $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ כל שני וקטורים בת"ל אזי כל שלושה וקטורים גם בת"ל.

כן	לא

9. אם מטריצת-מעבר מבסיס E לבסיס F משולשת עליונה אז מטריצת-מעבר מבסיס F לבסיס E משולשת תחתונה.

כן	לא

10. אם הוקטורים $\vec{f}_1-2\vec{f}_2+\vec{f}_3,\ 2\vec{f}_1-\vec{f}_2-\vec{f}_3,\ \vec{f}_1+\vec{f}_2-2\vec{f}_3$ פורשים את מרחב V, אזי הוקטורים $\vec{f}_1-\vec{f}_2,\ \vec{f}_2-\vec{f}_3$ גם פורשים את V.

כן	לא

11. אם המטריצה של האופרטור הלינארי $L: R^2 \to R^2$ בבסיס הסטנדרטי שווה ל- $\begin{pmatrix} 11 & -30 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$, אז מטריצה של אותו האופרטור בבסיס $\vec{f}_1=(3,1)$ $\vec{f}_2=(5,2)$ מכילה 2 אפסים.

כן	לא

12. למשוואה $z^2+z+1=0, z\in\mathbf{C}$ יש 4 פתרונות שונים.

כן	לא

13. איחד של שתי קבוצות בת"ל גם קבוצה בת"ל.

כן	לא

14. $\mathrm{Sp}(\,(-1,-1,1,1),(-1,2,1,-2)\,)\subseteq \mathrm{Sp}(\,(-1,2,0,-2),(-1,1,1,-1)\,)$.

כן	לא

15. אם $L{:}U\to V$ העתקה לינארית חד-חד-ערכית, אזי $\dim(\mathrm{Ker}(L))=0$.

כן	לא

16. יהיו V_1,V_2,V_3 שלושה תת-מרחבים של מרחב וקטורי V המקיימים: $V_1\cup V_2=V_3$,
אזי $\dim(V_1)<\dim(V_3)$ וגם $\dim(V_2)<\dim(V_3)$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

18 10 **נקודות.**

מצא את כל הרכיבים של המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & z & 2 \\ -1 & 1 & u \\ x & y & v \end{pmatrix}$ אם ידוע שמרחב העמודות של A מוכל במרחב הפתרונות של A.

19. **15 נקודות.**

פונקציה $L:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ מוגדרת ע"י הנוסחה $L(A) = A + A^T$.

א. הוכח ש- L אופרטור לינארי.

ב. מצא את $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ ובסיס של החיתוך $\mathrm{Im}(L) \cap \mathrm{Ker}(L)$.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית,
סמסטר ב',מועד ב' .תשנ"ח. **03.09.98**
המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.

-

חלק א. בחלק זה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

1. אם $A=\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3+2i \end{pmatrix}$ אז $A+A^{-1}$ שווה ל:

א. $\begin{pmatrix} 2i-2 & -2i \\ -2+2i & 4-2i \end{pmatrix}$. **ב.** $\begin{pmatrix} 2i-2 & -2i \\ -2-2i & 4+2i \end{pmatrix}$. **ג.** $\begin{pmatrix} -2i+2 & 2i \\ -2+2i & 4+2i \end{pmatrix}$.

ד. $\begin{pmatrix} 2i+2 & 2i \\ 2+2i & 4+2i \end{pmatrix}$. **ה.** $\begin{pmatrix} -2i+2 & -2i \\ -2-2i & 4-2i \end{pmatrix}$.

התשובה הנכונה היא	

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני מרחבים U ו V כאשר
$U=\mathrm{Sp}(\ (1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)\ ),\ V=\mathrm{Sp}(\ (1,2,2),(2,3,1)\ )$.

בסיס של $U\cap V$	
בסיס של $U+V$	

3. הדרגה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

תהיה מינימלית אם ורק אם :

א. $k=1$.
ב. $a\neq 2$.
ג. $k\neq 1$.
ד. $a=2$.
ה. $a=3$ או $a=1$.

התשובה הנכונה היא	

4. בין הקבוצות הבאות בחר את בסיסו של מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

א. $\vec{a}_1 = (1,2,2,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ב. $\vec{a}_1 = (1,1,-1,-1), \vec{a}_2 = (2,2,-2,-2)$.

ג. $\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ד. $\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,2,1)$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנ"ל איננה בסיס של מרחב הפתרונות.

התשובה הנכונה היא	

5. אם אופרטור לינארי $L:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ מוגדר ע"י הנוסחה

$L((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_3 - x_4)$ **,**

אז $\mathrm{Ker}(L)$ נפרש ע"י הוקטורים:

א. $(1,-1,1,1), (-1,0,-1,0)$.

ב. $(1,-1,0,0), (0,0,1,1)$.

ג. $(-1,0,-1,0), (0,0,1,1)$.

ד. $(1,-2,1,-2), (1,-1,1,1)$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנ"ל איננה פורשת את $\mathrm{Ker}(L)$.

התשובה הנכונה היא	

6 . מספר הערכים העצמיים (השונים) של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

שווה ל:

א. 3

ב. 2

ג. 1

ד. 0

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

התשובה הנכונה היא	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות. יש לבחור 9 שאלות מתוך 11.

7. אם U מרחב הפתרונות של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ו- V מרחב הפתרונות של המשוואה $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, אז $\mathbf{R}^3 = U + V$.

כן	**לא**

8. אם $L{:}U \to V$ העתקה לינארית בין שני מרחבים U,V המקיימים $\dim(U) = 5, \dim(V) = 2$, אז במרחב $\mathrm{Ker}(L)$ תמיד אפשר למצוא שלושה וקטורים בת"ל.

כן	**לא**

9. אם מטריצת-מעבר מבסיס E לבסיס F משולשת תחתונה אז מטריצת-מעבר מבסיס F לבסיס E משולשת עליונה.

כן	**לא**

10. הפולינומים הממשיים $\vec{a}_1 = x^3 + x^2 + x + 1, \vec{a}_2 = -x^3 + x^2 - x + 1, \vec{a}_3 = x^3 - x^2 - x - 1$ השייכים למרחב הפולינומים $\mathbf{R}_3[x]$ בלתי-תלויים לינארית.

כן	**לא**

11. מימד של מרחב העצמי של הערך העצמי 0 של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

שווה ל-1.

כן	לא

12. למשוואה $z^2+z+1=0, z\in\mathbf{C}$ יש 2 פתרונות שונים.

כן	לא

13.אם T,S שתי קבוצות בת"ל , אז גם $T\setminus S$ קבוצה בת"ל.

כן	לא

14. $\mathrm{Sp}(\ (-1,-1,1,1),(-1,2,1,-2)\ ) \subseteq \mathrm{Sp}(\ (-1,2,0,-2),(-1,1,1,-1)\ )$.

כן	לא

15. אופרטור לינארי $L:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ המוגדר ע"י הנוסחה $L((x,y))=(x-y,x+ay)$ יהיה הפיך לכל הערכים הממשיים של הפרמטר a.

כן	לא

16. אם מטריצה A מגודל 3×2 מכילה 5 אפסים, אז $rank(A)\ge 1$.

כן	לא

17. הוקטור $(1,3,0,1)$ שייך לפרישה לינארית $Sp((1,2,0,1),(1,1,1,0),(1,0,1,0))$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

18 13 **נקודות.**

א. רשום את הבסיס הסטנדרטי S של מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

ב. הוכח שהקבוצות הבאות הן בסיסים של מרחב הפתרונות.

$$A = \{\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (-1,3,1,-1)\};\ B = \{\vec{b}_1 = (-1,-3,1,2), \vec{b}_2 = (-2,-4,2,3)\}$$

ומצא את מטריצת מעבר ${}_BT_S$.

(<u>תזכורת:</u> הבסיס הסטנדרטי הוא הבסיס שמורכב מהפתרונות הבסיסיים של מערכת הומוגנית).

19. **13 נקודות.**

נתונה פונקציה $L:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(X)=XB, X\in M_5(\mathbf{R})$ כאשר

$B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

א. הוכח ש- L העתקה לינארית.

ב. מצא את $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ ובסיס של $\mathrm{Im}(L)$.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית,

סמסטר ב', מועד ב' .תשנ"ח. **03.09.98**

המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק

משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.

-

חלק א. בחלק זה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

1. אם $A=\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3+2i\end{pmatrix}$ אז $A+A^{-1}$ שווה ל:

א. $\begin{pmatrix} -2i+2 & -2i \\ -2-2i & 4-2i\end{pmatrix}$. **ב.** $\begin{pmatrix} 2i-2 & -2i \\ -2+2i & 4-2i\end{pmatrix}$. **ג.** $\begin{pmatrix} 2i-2 & -2i \\ -2-2i & 4+2i\end{pmatrix}$.

ד. $\begin{pmatrix} -2i+2 & 2i \\ -2+2i & 4+2i\end{pmatrix}$. **ה.** $\begin{pmatrix} 2i+2 & 2i \\ 2+2i & 4+2i\end{pmatrix}$.

התשובה הנכונה היא	

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני מרחבים U ו V כאשר
$U=\mathrm{Sp}(\ (1,2,1),(1,1,\text{-}1),(1,3,3)\ ),\ V=\mathrm{Sp}(\ (1,2,2),(2,3,1)\ )$.

בסיס של $U\cap V$	
בסיס של $U+V$	

3. הדרגה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

תהיה מינימלית אם ורק אם :

א. $a=3$ או $a=1$.

ב. $a=1$.

ג. $a\neq 2$.

ד. $a\neq 1$.

ה. $a=2$.

התשובה הנכונה היא	

4. בין הקבוצות הבאות בחר את בסיסו של מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ -x_1+x_2+2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

א. $\vec{a}_1=(-1,-1,1,1), \vec{a}_2=(1,2,2,1)$.

ב. $\vec{a}_1=(1,2,2,1), \vec{a}_2=(1,1,1,1)$.

ג. $\vec{a}_1=(1,1,-1,-1), \vec{a}_2=(2,2,-2,-2)$.

ד. $\vec{a}_1=(-1,-1,1,1), \vec{a}_2=(1,1,1,1)$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנ"ל איננה בסיס של מרחב הפתרונות.

התשובה הנכונה היא	

5. אם אופרטור לינארי $L:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ מוגדר ע"י הנוסחה

$L((x_1,x_2,x_3,x_4))=(x_1+x_2,x_1+x_2,x_3-x_4,x_3-x_4)$ **,**

אז $\mathrm{Ker}(L)$ נפרש ע"י הוקטורים:

א. $(1,-1,1,1),(-1,0,-1,0)$.

ב. $(-1,0,-1,0),(0,0,1,1)$.

ג. $(1,-2,1,-2),(1,-1,1,1)$.

ד. $(1,-1,0,0),(0,0,1,1)$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנ"ל איננה פורשת את $\mathrm{Ker}(L)$.

התשובה הנכונה היא	

6 . מספר הערכים העצמיים (השונים) של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

שווה ל:

א. 2.
ב. 1.
ג. 0.
ד. 3.
ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

התשובה הנכונה היא	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל3- נקודות. יש לבחור 9 שאלות מתוך 11.

7. מימד של מרחב העצמי של הערך העצמי 0 של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

שווה ל1-.

כן	**לא**

8. למשוואה $z^2+z+1=0, z\in\mathbf{C}$ יש 2 פתרונות שונים.

כן	**לא**

9. אם T,S שתי קבוצות בת"ל , אז גם $T \setminus S$ קבוצה בת"ל.

כן	לא

10. $\mathrm{Sp}(\ (-1,2,0,-2),(-1,1,1,-1)\ ) \subseteq \mathrm{Sp}(\ (-1,-1,1,1),(-1,2,1,-2)\ )$.

כן	לא

11. אופרטור לינארי $L:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ המוגדר ע"י הנוסחה $L((x,y)) = (x-y, x+ay)$ יהיה הפיך לכל הערכים הממשיים של הפרמטר a.

כן	לא

12. אם מטריצה A מגודל 2×3 מכילה 5 אפסים, אז $rank(A) \geq 1$.

כן	לא

13. הוקטור $(1,3,0,1)$ שייך לפרישה לינארית $Sp((1,2,0,1),(1,1,1,0),(1,0,1,0))$.

כן	לא

14. אם U מרחב הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3=0$ ו- V מרחב הפתרונות של המשוואה $x_1-x_2-x_3=0$, אז $\mathbf{R}^3 = U+V$.

כן	לא

15. אם $L:U \to V$ העתקה לינארית בין שני מרחבים U,V המקיימים $\dim(U)=5, \dim(V)=2$, אז במרחב $\mathrm{Ker}(L)$ תמיד אפשר למצוא שלושה וקטורים בת"ל.

כן	לא

16. אם מטריצת-מעבר מבסיס E לבסיס F משולשת תחתונה אז מטריצת-מעבר מבסיס F לבסיס E משולשת עליונה.

לא	כן

17. הפולינומים הממשיים $\vec{a}_1 = x^3 + x^2 + x + 1, \vec{a}_2 = -x^3 + x^2 - x + 1, \vec{a}_3 = x^3 - x^2 - x - 1$ השייכים למרחב הפולינומים $\mathbf{R}_3[x]$ בלתי-תלויים לינארית.

לא	כן

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

18. 13 **נקודות.**

א. רשום את הבסיס הסטנדרטי S של מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

ב. הוכח שהקבוצות הבאות הן בסיסים של מרחב הפתרונות.

$$A = \{\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (-1,3,1,-1)\};\ B = \{\vec{b}_1 = (-1,-3,1,2), \vec{b}_2 = (-2,-4,2,3)\}$$

ומצא את מטריצת מעבר ${}_{B}T_{S}$.
(<u>תזכורת</u>: הבסיס הסטנדרטי הוא הבסיס שמורכב מהפתרונות הבסיסיים של מערכת הומוגנית).

19. **13 נקודות.**
נתונה פונקציה $L:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(X)=XB, X\in M_5(\mathbf{R})$ כאשר
$B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

א. הוכח ש- L העתקה לינארית.
ב. מצא את $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ ובסיס של $\mathrm{Im}(L)$.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית, 11.06.00
סמסטר ב', מועד א'. תש"ס.
המרצה: פרופ' צ. ארד, ד"ר ז.בלנוב, ד"ר מ.מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק במחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים ממשיים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}((1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)), V = \mathrm{Sp}((-1,2,2),(2,3,1))$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

2. נתונה מטריצה ממשית

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ a & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי. עבור אילו ערכי a הערך של $rank(A)$ יהיה מינימלי ?

3. מטריצה של העתקה לינארית $L:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^3$ בבסיסים הסטנדרטים שווה ל- $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. מצא את בסיס של $Ker(L)$.

בסיס של $Ker(L)$	

4. אם מערכת משוואות ממשיות

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

פתירה לכל עמודה $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$, אז מימד של מרחב הפתרונות

א. קטן מ-2.
ב. גדול מ-2.
ג. שווה ל-2.
ד. שווה ל-3.
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

5. מצא בסיס של מרחב השורות של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ שרכביה שייכם לשדה $\mathbf{F}_3$ וחשב את הקואורדינטות של השורה השלישית בבסיס שמצת.

בסיס של מרחב השורות	
קואורדינטות של שורה שלישית בבסיס שמצאת	

6. מטריצה של האופרטור הליניארי $L:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ בבסיס $A=\{\vec{a}_1=(1,1,0),\vec{a}_2=(0,1,0),\vec{a}_3=(0,1,1)\}$ שווה ל- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$. אם $L((1,2,1))=(1,2,1)$

אז

א. $a=-2, b=1, c=-2$.

ב. $a=0, b=1, c=0$.

ג. $a=0, b=-1, c=0$.

ד. $a=2, b=1, c=2$.

ה. $a=-2, b=0, c=0$.

התשובה הנכונה היא	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות.

7. $Sp((-1,2,0,2),(-1,1,1,-1)) \subseteq Sp((-2,3,1,1),(0,1,-1,3))$

כן	לא

8. אם S,T שתי קבוצות בלתי-תלויות של וקטורים אז גם $S\cup T$ קבוצה בת"ל.

כן	לא

9. הקואורדינטות של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ בבסיס

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ שווות ל- $(1,1,1,0)$.

כן	לא

10. העתקה לינארית $L : U \to V$ תהיה חד-חד-ערכית אם ורק אם $\dim(Ker(L)) = 0$.

כן	לא

11. אם A בסיס של תת-מרחב U ו B בסיס של תת-מרחב V אז $A \cap B$ בסיס של $U \cap V$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

12 15 **נקודות.**

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.
ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.
ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A.

13. 15 נקודות.
יהי $\mathbf{R}_4[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל-4. בכל אחד מהמקרים הבאים ברר האם קבוצה S היא תת-מרחב של $\mathbf{R}_4[x]$. נמק את תשובתך.
א. S היא קבוצת הפולינומים $f(x)\in\mathbf{R}_4[x]$ בעלי שורש אחד בדיוק.
ב. S היא קבוצת הפולינומים $f(x)\in\mathbf{R}_4[x]$ האי-זוגיים (כלומר $-f(x)=f(-x)$ מתקיים לכל x ממשי).

14. 15 נקודות.
הוכח שלכל תת-מרחב U של מרחב V קיים תת-מרחב W של V כך ש-
$W+U=V, W\cap U=\{\bar{0}\}$.
(רמז: כל בסיס של תת-מרחב ניתן להשלים עד בסיס המרחב כולו)

בהצלחה !

אלגברה לינארית א', מדעי המחשב,
בחינת סוף סמסטר א' מועד א', תשס"א – 01.03.2001

משך הבחינה שעתיים וחצי. אפשר להשתמש במחשבון פשוט. אין להשתמש בחומר עזר נוסף. אין לפרק את השאלון. בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון.
התשובות לחלקים א' ו ב' ייבדקו רק <u>בטופס הבחינה</u> והתשובות לחלק ג' ייבדקו <u>במחברות.</u>

<u>חלק א'.</u>
הוראות: בחלק מהשאלות עליך לרשום את התשובה הסופית בתוך התיבה המתאימה, ובחלק האחר עליך לסמן בעיגול את התשובה הנכונה מבין 5 התשובות האפשריות. בין 6 שאלות **<u>יש לענות על 5 שאלות בלבד !</u>** משקל של כל שאלה בחלק זה הוא **8 נקודות**.

1. נתונה מערכת המשוואות
$$\begin{cases} 2ax+y+z=4 \\ x+ay+z=3 \\ x+2ay+z=4 \end{cases}$$
כאשר a הוא פרמטר ממשי.
א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

תשובה:	

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פיתרון ?

תשובה:	

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

תשובה:	

2. חשב את המספר המרוכב $\dfrac{(1+i)^{201}}{(-1+i\sqrt{3})^{99}}$

תשובה:	

3. מטריצה B מתקבלת מהמטריצה $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix}$ ע"י סיבוב ב-180 מעלות כלפי מרכז המטריצה. מצא $|B|$ אם ידוע ש- $|A|=100$.

תשובה:	

4. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ שרכיביה שייכם לשדה $\mathbf{Z}_5$. השורה הראשונה של A^{-1} שווה ל:

א. $(1,3,2)$.

ב. $(4,2,1)$.

ג. $(2,4,1)$.

ד. $(2,31)$.

ה. אף אחת מהתשובות האחרות לא נכונה.

5. מצא את כל המטריצות X המקיימות את המשוואה

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}X\right)^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}X^T$$

תשובה:
$X=$

6. אם רכיבים של מטריצה ממשית A מסדר 6×6 מוגדרים ע"י השוויון $A_{ij}=\min(i+j-1,6)$ אשר האינדקסים i,j משתנים מ-1 עד 6 , אז $|A|$ שווה ל:

א. 6.

ב. -6.

ג. 36.

ד. -36

ה. אך אחת מהתשובות האחרות לא נכונה.

חלק ב'.

על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק **"כן"** או **"לא"**. משקל של כל אחת מהשאלות **שווה ל-3 נקודות.**

----

7. אם בצורה מדורגת קנונית של מטריצה A יש שורת-אפס, אז למערכת משוואות הומוגנית $AX=0$ יש יותר מפתרון אחד.

כן	לא

8. סכום של שתי מטריצות אלמנטריות כלשהן תמיד מטריצה אלמנטרית.

כן	לא

9. אם $A=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & x\end{pmatrix}$, אז $A_{13}^{*}=x^2-x$.

כן	לא

10. אם A,B, שתי מטריצות ריבועיות הפיכות מסדר $n\times n$, אז גם המטריצה $A+B$ בהכרח הפיכה.

כן	לא

11. לכל מטריצה ממשית A מסדר $n\times n$ ולכל מספר ממשי k מתקיים $|kA|=k\,|A|$.

כן	לא

12. אם A,B שתי מטריצות המקיימות $A^TB=BA^T$, אז A,B בהכרח מטריצות ריבועיות מאותו הסדר.

כן	לא

13. המספר $\dfrac{(2+2i)^2}{(2-2i)^2}$ הוא מספר ממשי.

כן	לא

<u>**חלק ג'.**</u>

בחלק זה שלוש שאלות עליהן לכתוב פתרון **מלא בכתב יד ברור** <u>**במחברת**</u>.

---

17. 10 נקודות.

הוכח שאם במטריצה A עמודה ראשונה שווה לעמודה שניה, אז אותה תכונה מתקיימת לכל מטריצה B שמתקבלת מ-A ע"י פעולות שורה אלמנטריות.

18. 15 נקודות.

הוכח: אם רכיביה של מטריצה A מספרים שלמים, אז רכיביה של A^{-1} יהיו שלמים אם ורק אם $|A|=\pm1$.

19. 15 נקודות.

מטריצה ריבועית A מסדר n מוגדרת כדלקמן: $A_{ij}=\begin{cases} a+1, & i=j \\ \sqrt{a}, & |i-j|=1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ כאשר

האינדקסים i,j משתנים מ-1 עד n (a הוא פרמטר ממשי, $a>1$).

א. הוכח באינדוקציה ש- $|A|=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

ב. מצא את x_2 ממערכת משוואות $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 24.06.01
סמסטר ב', מועד א' .תשס"א.
המרצה: ד"ר ז.בלנוב, ד"ר מ.מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. מצא בסיס של החיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{F}_3^4$ ו $V \le \mathbf{F}_3^4$ כאשר

$U = \mathrm{Sp}((1,2,0,1),(1,1,1,0),(1,0,1,1))$ ו $V = \mathrm{Ker}(A)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbf{F}_3)$.

בסיס של $U \cap V$	

2. דרגה של מטריצה ממשית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

תהיה מקסימלית אם ורק אם :

א. $k = 1$.

ב. $k \neq -1$.

ג. $k \neq 1$.

ד. $k = -1$.

ו. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

התשובה הנכונה היא	

3. בין הטענות הבאות סמן את הטענות הנכונות

	נכון	לא נכון
$(V \leq W \wedge \dim(V) = \dim(W)) \Rightarrow V = W$		
$(V \leq W \wedge \dim(V) = \dim(W)) \Leftarrow V = W$		
$V \leq W \Rightarrow \dim(V) \leq \dim(W)$		
$V \leq W \Leftarrow \dim(V) \leq \dim(W)$		

4. מצא את מטריצת מעבר ${}_AT_B$ כאשר $A = (\bar{a}_1 = (1,1,0), \bar{a}_2 = (0,1,0), \bar{a}_3 = (0,1,1))$ ו $B = (\bar{b}_1 = (0,0,1), \bar{b}_2 = (0,1,1), \bar{b}_3 = (1,1,1))$ שני בסיסים של המרחב ממשי $\mathbf{R}^3$.

5. יהי $L : M_{2,2}(\mathbf{R}) \to M_{2,2}(\mathbf{R})$ אופרטור ליניארי המוגדר ע"י הנוסחה הבאה:

$L(X) = AX - XA$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. אזי

א. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 1, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 3$.

ב. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2$.

ג. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 3, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$.

ד. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 4, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 0$.

ה. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 0, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 4$.

התשובה הנכונה היא	

.6 מטריצה של העתקה לינארית $L:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^3$ בבסיסים הסטנדרטים שווה ל-

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&-1&1&0&1\\1&1&0&1&1\end{pmatrix}$$. מצא את בסיס של $Ker(L)$.

בסיס של $Ker(L)$	

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. __במקרה שכל 7 שאלות ייענו ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד__. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

.7 הפולינומים $-x^3+2x^2+2,\ \ -x^3+x^2+x-1,\ \ -3x^3+3x^2+x+1\in\mathbf{R}[x]$ תלויים ליניארית.

כן	לא

.8 הבסיס של המרחב הטריביאלי $V=\{\bar{0}\}$ מכיל וקטור אחד בלבד.

כן	לא

.9 הקואורדינטות של המטריצה $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ בבסיס

$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ שווה ל- $(1,1,1,0)$

כן	לא

10. העתקה לינארית $L:U\to V$ תהיה חד-חד-ערכית אם ורק אם $\mathrm{Im}(L)=V$.

כן	לא

11. קבוצת וקטורים $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ תלויה ליניארית אם ורק אם יש בה שני וקטורים פרופורציונאליים.

כן	לא

12. קבוצה של כל המטריצות מסדר 2×2 שיש להן מרחב עצמי בעל מימד 1 , היא תת-מרחב של מרחב המטריצות $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

כן	לא

13. קיימת מטריצה ממשית מסדר 2×2 שיש לה שני וקטורים עצמיים בלתי-תלויים ליניארית.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

14. 15 נקודות.
אופרטור ליניארי $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ מוגדר ע"י הנוסחה
$$L((x,y,z))=(-x-y-z,\quad y,\quad 2x+y+2z)$$
מצא את הבסיס B של $\mathbf{R}^3$ כך שהמטריצה $[L]_B$ תהיה אלכסונית.

15. 12 נקודות.
נתונה פונקציה $L:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ המוגדרת ע"י הנוסחה
$$L((x_1,x_2,x_3,x_4))=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_4,x_1+x_4)\ .$$

א. מצא את מטריצתו של L בבסיס:
$$\vec{b}_1=(1,1,0,0),\quad \vec{b}_2=(0,0,1,0),\quad \vec{b}_3=(0,0,1,1),\quad \vec{b}_4=(1,0,0,0)$$
ב. מצא את בסיסים של $\mathrm{Ker}(L),\mathrm{Im}(L)$ ודרגה של L .

16. 15 נקודות.

נתונות שתי פונקציות L_1, L_2 מ- $M_{2,2}(\mathbf{R})$ ל- $\mathbf{R}^2$ המוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות:

א. $L_1(X) = \det(X)(1,1)$.

ב. $L_2(X) = (1,1)X$.

1. לכל אחת מהפונקציות הנ"ל הוכח או הפרך האם הן העתקות ליניאריות (נמק !).
2. לכל אחת מהפונקציות הנ"ל שהיא אכן העתקה ליניארית בדוק האם היא חח"ע ועל (נמק !)

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 01.07.02

סמסטר ב', מועד א' .תשס"ב.

המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק

משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.

חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.

חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. אם שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{F}_5^4, V \le \mathbf{F}_5^4$ מוגדרים ע"י השוויון $U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,2,0),(2,0,1,2)\ ), V = \mathrm{Sp}(\ (2,0,2,1),(1,1,1,2))$ אז:

א. $\dim(U+V)=4, \dim(U\cap V)=0$.

ב. $\dim(U+V)=2, \dim(U\cap V)=2$.

ג. $\dim(U+V)=3, \dim(U\cap V)=1$.

ד. $\dim(U+V)=3, \dim(U\cap V)=0$.

ה. $\dim(U+V)=4, \dim(U\cap V)=1$.

התשובה הנכונה היא	

2. דרגת המטריצה שרכיביה מספרים ממשיים תהיה מקסימלית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

אם ורק אם:

א. $a=1$.
ב. אף אחת מהתשובות לא נכונה .
ג. $a=2$.
ד. $a=0.5$.
ה. $a=-1$.

התשובה הנכונה היא	

3. יהי $W \le \mathbf{R}_3[x]$ תת-מרחב המורכב מכל הפולינומים $f(x) \in \mathbf{R}_3[x]$ המקיימים $f(1)=f(0)$. מצא את בסיס של W.

4. נתונה מטריצת-מעבר $_AT_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ מבסיס $B=(\bar{b}_1=(1,2), \bar{b}_2=(1,1))$ לבסיס $A=(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$. חשב את הוקטורים $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ (שני הבסיסים הם בסיסי $\mathbf{R}^2$).

5. יהי $L: M_{2,2}(\mathbf{R}) \to M_{2,2}(\mathbf{R})$ אופרטור ליניארי המוגדר ע"י הנוסחה הבאה:
$L(X) = AX - XA$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. אזי

א. $\dim(\mathrm{Im}(L))=1, \dim(\mathrm{Ker}(L))=3$.

ב. $\dim(\mathrm{Im}(L))=2, \dim(\mathrm{Ker}(L))=2$.

ג. $\dim(\mathrm{Im}(L))=3, \dim(\mathrm{Ker}(L))=1$.

ד. $\dim(\mathrm{Im}(L))=4, \dim(\mathrm{Ker}(L))=0$.

ה. $\dim(\mathrm{Im}(L))=0, \dim(\mathrm{Ker}(L))=4$.

התשובה הנכונה היא	

6. השלם בסיס $\bar{b}_1=(1,1,1,1,0), \bar{b}_2=(1,-1,1,0,1), \bar{b}_3=(2,1,2,1,1)$ של תת-המרחב $W=\mathrm{Sp}(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$ עד בסיס של כל המרחב $\mathbf{R}^5$.

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. במקרה שכל 7 שאלות ייענו ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. המטריצות ממשיות $B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ תלויות ליניארית.

כן	**לא**

8. אם U,W שני תת-מרחבים של המרחב V אז $U\le W \Rightarrow \dim(U)\le\dim(W)$.

כן	**לא**

9. הקואורדינטות של הפולינום $x^3+x^2-2x+1\in\mathbf{R}_3[x]$ בבסיס $p_1(x)=x^3, p_2(x)=x^3-x^2, p_3(x)=x^2-x, p_4(x)=x-1$ שוות ל- $(1,1,1,0)$

כן	**לא**

10. מרחב ממשי $V=\{(a,b,b,c)\mid a,b,c\in\mathbf{R}\}$ נפרש ע"י וקטורים $(1,1,1,0), (0,1,1,1), (1,2,2,1)$.

כן	**לא**

11. קבוצת וקטורים $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ תלויה ליניארית אם ורק אם יש בה שני וקטורים פרופורציונאליים.

כן	לא

12. קבוצה של כל המטריצות ממשיות מסדר 2×2 שהוקטור $(1,1)$ הוא וקטור עצמי שלהן היא תת-מרחב של מרחב המטריצות $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

כן	לא

13. אם במטריצה ישנן r עמודות בת"ל, אז דרגתה תהיה r לפחות.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

14. 15 **נקודות.**

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.
ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.
ג. מצא את המטריצה המלכסנת P של A.

15. 15 נקודות.

נתונה פונקציה $L: M_{2\times 3}(\mathbf{R})\to \mathbf{R}^3$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(A)=(1,1)A$.

א. הוכח ש- L העתקה ליניארית.
ב. מצא את מטריצה של L בבסיסים סטנדרטיים.
ג. מצא את בסיסים של $\mathrm{Ker}(L),\mathrm{Im}(L)$ ודרגה של L.

16. 12 נקודות.

יהיו U,V שני תת-מרחבים של מרחב וקטורי W שמקיימים $U\cap V=\{\bar{0}\}$.
הוכח שאם קבוצה $\{\bar{s}_1,\bar{s}_2\}\subseteq V$ בת"ל, אז הקבוצה $\{\bar{s}_1,\bar{s}_2,\bar{u}\}$ תהיה בת"ל לכל וקטור $\bar{u}\in U$ השונה מאפס.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 23.08.02
סמסטר ב', מועד ב' .תשס"ב.
המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. אם שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{F}_5^4, V \le \mathbf{F}_5^4$ מוגדרים ע"י השוויון $U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,2,0), (2,0,1,2)\ ), V = \mathrm{Sp}(\ (2,0,2,1), (1,1,1,2))$. מצא את בסיסי $U \cap V$ ו $U+V$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U+V$	

2. דרגת המטריצה שרכיביה מספרים ממשיים תהיה מינימלית

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

<u>אם ורק אם:</u>

א. $a = 1$.
ב. אף אחת מהתשובות לא נכונה .
ג. $a = 2$.
ד. $a = -2$.
ה. $a = -1$.

התשובה הנכונה היא	

3. יהי $W \le M_{3,3}(\mathbf{R})$ תת-מרחב המורכב מכל מטריצות X המקיימים $X + X^T = 0$. אז $\dim(W)$ שווה ל:

א. 0.

ב. 9.
ג. 1.
ד. 3.
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

4. מצא מטריצת-מעבר מבסיס $B=(\bar b_1,\bar b_2)$ לבסיס $A=(\bar a_1,\bar a_2)$ כאשר
$A=\{\vec a_1=(-1,-1,1,1),\vec a_2=(-1,3,1,-1)\};\ B=\{\vec b_1=(-1,-3,1,2),\vec b_2=(-2,-4,2,3)\}$. חשב
(שני הבסיסים הם בסיסי של מרחב ממשי דו-מימדי).

5. יהי $L:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}^4$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י הנוסחה הבאה:
$L(p(x))=(p(1),0,p(-1),p(1)+p(-1))$. אזי

א. $\dim(\mathrm{Im}(L))=0,\dim(\mathrm{Ker}(L))=3$.
ב. $\dim(\mathrm{Im}(L))=2,\dim(\mathrm{Ker}(L))=1$.
ג. $\dim(\mathrm{Im}(L))=3,\dim(\mathrm{Ker}(L))=0$.
ד. $\dim(\mathrm{Im}(L))=1,\dim(\mathrm{Ker}(L))=2$.
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

התשובה הנכונה היא	

6. השלם בסיס $\bar b_1=(1,1,1,1,0),\bar b_2=(1,-1,1,0,1),\bar b_3=(2,1,2,1,1)$ של תת-המרחב
$W=\mathrm{Sp}(\bar b_1,\bar b_2,\bar b_3)$ עד בסיס של כל המרחב $\mathbf{R}^5$.

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. <u>במקרה שכל 7 שאלות ייענו ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. קואורדינטות של מטריצה ממשית $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ בבסיס

$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ שוות ל- $(1,0,1,0)$.

כן	לא

8. אם U,W שני תת-מרחבים של המרחב V אז $\dim(U)\le\dim(W) \Leftarrow U\le W$.

כן	לא

9. הפולינומים הממשיים

$p_1(x)=x^3,\ p_2(x)=x^3-x^2,\ p_3(x)=x^2-x,\ p_4(x)=x^3+x^2-2x+1$ ת"ל.

כן	לא

10. מרחב ממשי $V=\{(a,b,a+b,c)\mid a,b,c\in\mathbf{R}\}$ נפרש ע"י וקטורים $(1,1,2,0),(0,1,1,1),(1,2,3,1),(0,1,1,1)$.

כן	לא

11. קבוצה ריקה היא קבוצה בת"ל.

כן	לא

12. קבוצה של כל המטריצות ממשיות מסדר 2×2 שהוקטור $(1,1)$ שייך לגרעין שלהן היא תת-מרחב של מרחב המטריצות $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

כן	לא

13. אם במטריצה ישנן r שורות שונות מאפס , אז דרגתה תהיה r לפחות.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

14. 15 **נקודות.**

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא את המטריצה המלכסנת P של A.

15. 12 נקודות.

נתונה פונקציה $L: M_{3\times3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(A) = A + A^T$.

א. הוכח ש- L העתקה ליניארית.

ב. מצא את בסיסים של $\mathrm{Ker}(L), \mathrm{Im}(L)$ ודרגה של L.

16. 15 נקודות.

א. הוכח שאם A, B מטריצות צמודות (דומות) אז המטריצות $A^m - I, B^m - I$ צמודות לכל m טבעי.

ב. הוכח שאם λ ערך עצמי של מטריצה A , אז λ^2 הוא ערך עצמי של A^2.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 23.08.02

סמסטר ב', מועד ב' .תשס"ב.

המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק

משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.

חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה.</u>

חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו</u> <u>ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. אם שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{F}_5^4, V \le \mathbf{F}_5^4$ מוגדרים ע"י השוויון $U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,2,0),(2,0,1,2)\ ), V = \mathrm{Sp}(\ (2,0,2,1),(1,1,1,2))$. מצא את בסיסי $U \cap V$ ו $U + V$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

2. דרגת המטריצה שרכיביה מספרים ממשיים תהיה מינימלית

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

<u>אם ורק אם:</u>

א. $a = 1$.
ב. אף אחת מהתשובות לא נכונה .
ג. $a = 2$.
ד. $a = -2$.
ה. $a = -1$.

התשובה הנכונה היא	

3. יהי $W \le M_{3,3}(\mathbf{R})$ תת-מרחב המורכב מכל מטריצות X המקיימים $X + X^T = 0$. אז $\dim(W)$ שווה ל:

א. 0.
ב. 9.
ג. 1.
ד. 3.
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

4. מצא מטריצת-מעבר מבסיס $B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ לבסיס $A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ כאשר $A = \{\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (-1,3,1,-1)\};\ B = \{\vec{b}_1 = (-1,-3,1,2), \vec{b}_2 = (-2,-4,2,3)\}$. חשב (שני הבסיסים הם בסיסי של מרחב ממשי דו-מימדי).

5. יהי $L:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}^4$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י הנוסחה הבאה:
$L(p(x))=(p(1),0,p(-1),p(1)+p(-1))$. אזי

א. $\dim(\operatorname{Im}(L))=0, \dim(\operatorname{Ker}(L))=3$.
ב. $\dim(\operatorname{Im}(L))=2, \dim(\operatorname{Ker}(L))=1$.
ג. $\dim(\operatorname{Im}(L))=3, \dim(\operatorname{Ker}(L))=0$.
ד. $\dim(\operatorname{Im}(L))=1, \dim(\operatorname{Ker}(L))=2$.
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

התשובה הנכונה היא	

6. השלם בסיס $\bar{b}_1=(1,1,1,1,0), \bar{b}_2=(1,-1,1,0,1), \bar{b}_3=(2,1,2,1,1)$ של תת-המרחב
$W=\operatorname{Sp}(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$ עד בסיס של כל המרחב $\mathbf{R}^5$.

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. <u>במקרה שכל 7 שאלות ייענו</u> <u>ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. קואורדינטות של מטריצה ממשית $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ בבסיס

$B_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ שוות ל- $(1,0,1,0)$.

כן	לא

8. אם U,W שני תת-מרחבים של המרחב V אז $\dim(U)\le\dim(W) \Leftarrow U\le W$.

כן	לא

9. הפולינומים הממשיים
$p_1(x)=x^3, p_2(x)=x^3-x^2, p_3(x)=x^2-x, p_4(x)=x^3+x^2-2x+1$ ת"ל.

כן	לא

10. מרחב ממשי $V=\{(a,b,a+b,c)\mid a,b,c\in\mathbf{R}\}$ נפרש ע"י
וקטורים $(1,1,2,0),(0,1,1,1),(1,2,3,1),(0,1,1,1)$.

כן	לא

11. קבוצה ריקה היא קבוצה בת"ל.

כן	לא

12. קבוצה של כל המטריצות ממשיות מסדר 2×2 שהוקטור $(1,1)$ שייך לגרעין שלהן
היא תת-מרחב של מרחב המטריצות $M_{2,2}(\mathbf{R})$.

כן	לא

13. אם במטריצה ישנן r שורות שונות מאפס , אז דרגתה תהיה r לפחות.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

14. 15 **נקודות.**

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא את המטריצה המלכסנת P של A.

15. 12 נקודות.

נתונה פונקציה $L: M_{3\times3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(A)=A+A^T$.

א. הוכח ש- L העתקה ליניארית.

ב. מצא את בסיסים של $\mathrm{Ker}(L), \mathrm{Im}(L)$ ודרגה של L.

16. 15 נקודות.

א. הוכח שאם A,B מטריצות צמודות (דומות) אז המטריצות A^m-I, B^m-I צמודות לכל m טבעי.

ב. הוכח שאם λ ערך עצמי של מטריצה A, אז λ^2 הוא ערך עצמי של A^2.

בהצלחה !