<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 09.07.2003
סמסטר ב', מועד א' .תשס"ג.
המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. מצא בסיסי של $U+V, U\cap V$ כאשר $U\le \mathbf{R}^5, V\le \mathbf{R}^5$ מוגדרים ע"י השוויון
$U=\mathrm{Sp}(\,(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(3,3,3,3,3)\,), V=\mathrm{Sp}(\;(0,1,2,3,0)\,,(3,2,1,0,3))$.

בסיס של $U\cap V$	
בסיס של $U+V$	

2. דרגת המטריצה שרכיביה מספרים ממשיים תהיה מינימלית

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ a & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & -a & 1\end{pmatrix}$$

<u>אם ורק אם:</u>

א. $a=1$.
ב. $a=0$.
ג. $a=-1$.
ד. $a=2$
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

התשובה הנכונה היא	

3. יהי $V \le \mathbf{R}^4$ תת-מרחב המוגדר כדלקמן: $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.
בין הקבוצות הבאות בחר את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של V.

א. $(1,2,2,1), (1,1,1,1)$.
ב. $(0,0,1,1), (1,-1,-1,1)$.
ג. $(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,2,-2,-1)$.
ד. $(1,1,1,1), (0,0,1,1), (1,0,0,1)$
ה. אף אחת מהקבוצות הנתונות איננה בסיס של V.

4. מצא את מטריצת-מעבר ${}_A T_B$ כאשר $B = (\bar{b}_1 = (1,2,2), \bar{b}_2 = (3,1,2), \bar{b}_2 = (2,0,3))$ ו $A = (\bar{a}_1 = (1,0,1), \bar{a}_2 = (1,1,2), \bar{a}_2 = (1,1,1))$ הם שני בסיסים של $\mathbf{Z}_5^3$.

5. יהי $L : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ אופרטור ליניארי המוגדר ע"י הנוסחה הבאה:
$L((x, y, z, w)) = (x + y + z, y + z + w, x - w)$. אזי

א. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 1, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 3$.
ב. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2$.
ג. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 3, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$.
ד. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 4, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 0$.
ה. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 0, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 4$.

התשובה הנכונה היא	

6. קואורדינטות של וקטור $(2,4,6) \in \mathbf{R}^3$ בבסיס $\bar{b}_1 = (a,b,1), \bar{b}_2 = (b,a,1), \bar{b}_3 = (1,1,1)$
שוות ל- $(1,2,c)$. מצא את a,b,c (a,b,c הם מספרים ממשיים).

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. <u>במקרה שכל 7 שאלות ייענו ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. הפולינומים $p_1(x)=x^3,\ p_2(x)=x^3-x^2,\ p_3(x)=x^2-x,\ p_4(x)=x-1\in \mathbf{R}[x]$ תלויות ליניארית.

לא	כן

8. אם U,W שני תת-מרחבים של המרחב V אז $U\le W+U$.

לא	כן

9. אם S,T שתי תת-קבוצות סופיות של מרחב V אז $S\subseteq T \Rightarrow Sp(S)\le S(T)$.

לא	כן

10. מרחב המטריצות $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in \mathbf{R}\right\}$ נפרש ע"י המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

לא	כן

11. קבוצת וקטורים $\{\bar a,\bar b,\bar c\}$ תלויה ליניארית אם ורק אם יש בה שני וקטורים פרופורציונאליים.

לא	כן

12. קבוצה המטריצות $V=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})\mid \det(A)=0\}$ היא תת-מרחב של המרחב $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$.

לא	כן

13. אם במטריצה A ישנן r עמודות ת"ל, אז דרגתה תהיה $rank(A) \le r$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

14. 15 נקודות.

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא את המטריצה המלכסנת P של A.

15. 15 נקודות.

נתונה פונקציה $L : \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(X) = XA$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

א. הוכח ש- L העתקה ליניארית.

ב. מצא את מטריצה של L בבסיס הסטנדרטי:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. מצא את בסיסים של $\mathrm{Ker}(L), \mathrm{Im}(L)$ ודרגה של L.

16. 12 נקודות.

יהיו U,V שני תת-מרחבים של מרחב וקטורי W שמקיימים $U \cap V = \{\bar{0}\}, U+V=W$.
הוכח שאם B בסיס של U ו A בסיס של U, אז $A \cup B$ בסיס של W.

בהצלחה !

המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. מצא בסיסי של $U+V, U\cap V$ כאשר $U\le \mathbf{R}^5, V\le \mathbf{R}^5$ מוגדרים ע"י השוויון $U=\mathrm{Sp}(\ (1,2,1,2,1),(3,1,3,1,3)\ ), V=\mathrm{Sp}(\ (1,1,1,1,1),(1,-1,1,-1,1),(1,3,1,3,1))$.

בסיס של $U\cap V$	
בסיס של $U+V$	

2. איפוס של המטריצה A $(null(A))$ שרכיביה מספרים ממשיים יהיה מינימלי

$$A=\begin{pmatrix} -1 & a & -1 & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

<u>אם ורק אם:</u>

א. $a=1$.
ב. $a=0$.
ג. $a=-1$.
ד. $a=2$
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

התשובה הנכונה היא	

3. יהי $V \le \mathbf{R}_3[x]$ תת-מרחב המוגדר כדלקמן: $V = \{p(x) \mid p(-1) = 0\}$. בין הקבוצות הבאות בחר את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של V.

א. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1, x^3 + x^2 + x + 1$.

ב. $x + 1, x^3 - x^2 - x + 1$.

ג. $x^3 + x^2, x + 1, x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.

ד. $x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x, x^3 + 1$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנתונות איננה בסיס של V.

4. מצא את מטריצת-מעבר ${}_AT_B$ כאשר $B = (\bar{b}_1 = (1,2,2), \bar{b}_2 = (0,1,0), \bar{b}_3 = (2,0,3))$ ו $A = (\bar{a}_1 = (1,0,1), \bar{a}_2 = (1,1,2), \bar{a}_3 = (2,2,3))$ הם שני בסיסים של $\mathbf{Z}_5^3$.

5. יהי $L : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ אופרטור ליניארי המוגדר ע"י הנוסחה הבאה: $L((x, y, z, w)) = (x + y, y - z, z + w, x - w)$. אזי

א. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 1, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 3$.

ב. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2$.

ג. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 3, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$.

ד. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 4, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 0$.

ה. $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 0, \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 4$.

התשובה הנכונה היא	

6. קואורדינטות של המטריצה $\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ בבסיס $B_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ שוות ל- $(2,4,0,c)$. מצא את a, b, c (a, b, c הם מספרים ממשיים).

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. <u>במקרה שכל 7 שאלות ייענו ייבדקו 6</u> <u>שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. המטריצות $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\in M_{2\times2}(\mathbf{R})$ תלויות ליניארית.

כן	לא

8. אם U,W שני תת-מרחבים של המרחב V אז $U \geq W+U$.

כן	לא

9. אם S,T שתי תת-קבוצות סופיות של מרחב V אז $S \subseteq T \Leftarrow Sp(S) \leq S(T)$.

כן	לא

10. מרחב הפולינומים $V=\left\{ax^3+bx^2+ax+b \,\middle|\, a,b\in\mathbf{R}\right\}$ נפרש ע"י הפולינומים $x^3+x^2+x+1,\ 2x^3+x^2+2x+1,\ -x^3+x^2-x+1$.

כן	לא

11. בסיס של המרחב הטריביאלי מכיל וקטור אחד בדיוק.

כן	לא

12. קבוצה המטריצות $V=\{A\in M_{2\times2}(\mathbf{R}) \mid \mathrm{tr}(A)=0\}$ היא תת-מרחב של המרחב $M_{2\times2}(\mathbf{R})$.

כן	לא

13. אם במטריצה A כל r עמודות בת"ל, אז $rank(A)\geq r$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

14. 15 נקודות.

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא את המטריצה המלכסנת P של A.

15. 15 נקודות.

תהי $A\in\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. נגדיר פונקציה $L:\mathbf{M}_n(\mathbf{R})\to\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ ע"י הנוסחה $L(A)=XA-AX$.

א. הוכח ש- L אופרטור ליניארי.

ב. מצא בסיסים של $\mathrm{Im}(L),\mathrm{Ker}(L)$ במקרה $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

16. 12 נקודות.

יהי U תת-מרחב כלשהו של מרחב וקטורי V. הוכח שוקטורים $\bar{a},\bar{b}\in V$ מקיימים $\dim(U+Sp(\bar{a}))<\dim(U+Sp(\bar{b}))$ אם ורק אם $\bar{a}\in U$ ו $\bar{b}\notin U$.

בהצלחה !

אלגברה ליניארית א', מדעי המחשב,

בחינת סוף סמסטר קיץ (הנדסאים), מועד א',

תשס"ה – 29.10.04

משך הבחינה שעתיים וחצי. אפשר להשתמש במחשבון פשוט. אין להשתמש בחומר עזר נוסף. אין לפרק את השאלון. בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון.

התשובות לחלקים א' ו ב' ייבדקו רק <u>בטופס הבחינה</u> והתשובות לחלק ג' ייבדקו <u>במחברות.</u>

<u>חלק א'.</u>

הוראות: בחלק מהשאלות עליך לרשום את התשובה הסופית בתוך התיבה המתאימה, ובחלק האחר עליך לסמן בעיגול את התשובה הנכונה מבין 5 התשובות האפשריות. בין 6 שאלות **<u>יש לענות על 5 שאלות בלבד !</u>** משקל של כל שאלה בחלק זה הוא **8 נקודות**.

1. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+ay+6z=a \\ x+2y+3az=2 \\ x+3y+2az=4 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

תשובה:	

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

תשובה:	

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

תשובה:	

2. חשב את $\sqrt{5-12i}$

תשובה:	

3. אם רכיבים של מטריצה ממשית A מסדר $n\times n$ מוגדרים ע"י השוויון $A_{ij}=\begin{cases} i, i=j \\ n, i\neq j \end{cases}$ אשר האינדקסים i, j משתנים מ-1 עד n , אז $|A|$ שווה ל:

תשובה:	

4. מטריצה B מתקבלת מהמטריצה $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix}$ ע"י סיבוב ב-90 מעלות כלפי מרכז המטריצה נגד כוון השעון. אם ידוע ש- $|A|=100$, אז $|B|$ שווה ל:

א. 10.
ב. -10.
ג. -100.
ד. 100
ה. אך אחת מהתשובות האחרות לא נכונה.

5. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^T$ שרכיביה שייכם לשדה $\mathbf{Z}_3$. השורה הראשונה של A^{-1} שווה ל:

א. $(1,1,2)$.
ב. $(0,2,1)$.
ג. $(2,2,1)$.
ד. $(0.5,0.5,-0.5)$.
ה. אף אחת מהתשובות האחרות לא נכונה.

6. מצא את כל המטריצות X המקיימות את המשוואה
$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}X+X^T\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

תשובה:

$X=$

<u>חלק ב'.</u>
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק **"כן"** או **"לא"**. משקל של כל אחת מהשאלות **שווה ל-3 נקודות.**

----

7. אם בצורה מדורגת קנונית של מטריצה A אין שורות-אפס, אז למערכת משוואות הומוגנית $AX=0$ יש פתרון יחיד.

כן	**לא**

8. מכפלה של שתי מטריצות אלמנטריות כלשהן תמיד מטריצה אלמנטרית.

כן	**לא**

9. אם $A=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$, אז $A_{13}^{*}=x^2-x$.

כן	**לא**

10. אם A,B , שתי מטריצות ריבועיות הפיכות מסדר $n\times n$, אז גם המטריצה $A+B$ בהכרח הפיכה.

כן	**לא**

11. לכל מטריצה ממשית A מסדר $n\times n$ ולכל מספר ממשי k מתקיים $|kA|=k|A|$.

כן	**לא**

12. אם A,B שתי מטריצות המקיימות $A^TB=BA^T$, אז A,B בהכרח מטריצות ריבועיות מאותו הסדר.

כן	**לא**

13. המספר $\frac{(2+2i)^2}{(2-2i)^2}$ הוא אינו מספר ממשי.

כן	**לא**

<u>חלק ג'.</u>

בחלק זה שלוש שאלות עליהן לכתוב פתרון **מלא בכתב יד ברור <u>במחברת</u>**.

----

17. 10 נקודות.

הוכח שאם $\bar{a},\bar{b}$ שני פתרונות פרטיים של ממ"ל $AX=0$ אז לכל מספר ממשי k הוקטור

$k\bar{a}+(1-k)\bar{b}$ גם יהיה פתרון פרטי של אותה ממ"ל.

18. 15 נקודות.

הוכח: אם רכיביה של מטריצה A מספרים שלמים, אז רכיביה של A^{-1} יהיו שלמים אם ורק אם $|A|=\pm 1$.

19. 15 נקודות.

א. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה ריבועית

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

מסדר n.

ב. מצא את x_n ממערכת משוואות $A\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית, 23.06.99
סמסטר ב', מועד א' .תשנ"ט.
המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.
 חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

-

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 9 נקודות

1. יהיה $V = \mathbf{R}^4$ מרחב אוקלידי עם מכפלה פנימית סטנדרטית:

$$(\vec{u},\vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 .$$

ע"י שיטת גרם-שמידט מצא בסיס אורטוגונלי של מרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית: $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

הבסיס האורטוגונלי	

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}(\ (1,-1,2,1),(2,0,3,2)\ ),\ V = \mathrm{Sp}(\ (-1,1,2,1)\ ,(0,2,3,2))$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

3. נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים. דרגה של A תהיה מינימלית אם ורק אם :

א. $a = b$.

ב. בדיוק אחד מהפרמטרים a,b שווה ל-1- .

ג. $a = 1$ וגם $b = 1$.

ד. $a = 1$ או $b = 1$.

ה. $a \neq 1$ וגם $b \neq 1$.

התשובה הנכונה היא	

4. בין הקבוצות הבאות סמן את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של מרחב השורות של המטריצה הממשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. $\vec{a}_1 = (1,2,2,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ב. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,-1,-1,1)$.

ג. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,-2,-1), \vec{a}_3 = (1,1,0,0)$.

ד. $\vec{a}_1 = (1,1,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,2,1), \vec{a}_3 = (2,2,2,2)$.

ה. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,-1,-1,1), \vec{a}_3 = (1,0,0,1)$.

התשובה הנכונה היא	

5. קואורדינטות של הוקטור $(1,0,0) \in \mathbf{R}^3$ בבסיס $\vec{a}_1=(1,a,b), \vec{a}_2=(1,1,1), \vec{a}_3=(1,2,3)$
שוות ל- $(1,-1,1)$. מצא a,b

6. אם מטריצה M של האופרטור הלינארי $L:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ בבסיס
$A=\{\vec{a}_1=(1,1,0), \vec{a}_2=(0,1,0), \vec{a}_3=(0,1,1)\}$ שווה ל- $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, אז

א. $L((1,2,1))=(2,2,1)$.
ב. $L((1,2,1))=(2,5,2)$.
ג. $L((1,2,1))=(2,1,2)$.
ד. $L((1,2,1))=(2,3,2)$.
ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

התשובה הנכונה היא	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל3- נקודות.

7. קבוצת הוקטורים $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ תהיה בת"ל אם ורק אם $\vec{e}_1+\vec{e}_2, \vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1-\vec{e}_3$ קבוצה
בת"ל.

כן	**לא**

8. אם במטריצה A מסדר $m\times n$, m עמודות ראשונות מהוות מטריצת-יחידה, אז $\dim(\mathrm{Ker}(A))<n-m$.

כן	לא

9. אופרטור לינארי $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ המוגדר ע"י הנוסחה $L((x,y))=(x-ay,x+y)$ יהיה הפיך לכל הערכים הממשיים של הפרמטר a.

כן	לא

10. סכום הקואורדינטות של הוקטור $(1,2,3)$ בבסיס $\vec{a}_1=(1,1,1),\vec{a}_2=(1,1,0),\vec{a}_3=(1,0,0)$ שווה ל-1-.

כן	לא

11. המטריצה $\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ שייכת לפרישה לינארית $Sp\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

12 15 **נקודות.**

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&2&1\\-3&0&4\end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A .

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A .

ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A .

13. 15 נקודות.

נתונה פונקציה $L:\mathbf{M}_2(\mathbf{R})\to\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(X)=XA$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

א. הוכח ש- L העתקה לינארית.

ב. מצא את מטריצתו של L בבסיס הסטנדרטי:

$$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ג. מצא את בסיסים של $\mathrm{Ker}(L),\mathrm{Im}(L)$ ודרגה של L .

14. 15 נקודות.

יהי $L:V\to V$ אופרטור לינארי שמקיים $L(L(\vec{v}))=L(\vec{v})$ לכל וקטור $\vec{v}\in V$.

א. הוכח ש- $L(\vec{w})=\vec{w}$ לכל $\vec{w}\in\mathrm{Im}(L)$

ב. הוכח ש- $\mathrm{Im}(L)\cap\mathrm{Ker}(L)=\{\vec{0}\},\mathrm{Im}(L)+\mathrm{Ker}(L)=V$.

ג. מה אפשר לומר על מטריצה של L אם $\mathrm{Ker}(L)=\{\vec{0}\}$? נמק את תשובתך.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית, 23.06.99

סמסטר ב', מועד א' .תשנ"ט.

המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק

משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.

חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.

חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 9 נקודות

1. יהיה $V = \mathbf{R}^4$ מרחב אוקלידי עם מכפלה פנימית סטנדרטית:
$(\vec{u},\vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$.
ע"י שיטת גרם-שמידט מצא בסיס אורטוגונלי של מרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית: $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

הבסיס האורטוגונלי	

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}(\ (-1,2,1,1),(0,3,2,2)\ ), V = \mathrm{Sp}(\ (1,2,1,-1),(2,3,2,0))$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

3. נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים. דרגה של A תהיה מינימלית אם ורק אם :

א. בדיוק אחד מהפרמטרים a,b שווה ל1- .
ב. $a = 1$ וגם $b = 1$.
ג. $a = 1$ או $b = 1$.
ד. $a \neq 1$ וגם $b \neq 1$.
ה. $a = b$.

התשובה הנכונה היא	

4. בין הקבוצות הבאות סמן את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של מרחב השורות של המטריצה הממשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,-1,-1,1)$.

ב. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,-2,-1), \vec{a}_3 = (1,1,0,0)$.

ג. $\vec{a}_1 = (1,1,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,2,1), \vec{a}_3 = (2,2,2,2)$.

ד. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,-1,-1,1), \vec{a}_3 = (1,0,0,1)$.

ה. $\vec{a}_1 = (1,2,2,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

התשובה הנכונה היא	

5. קואורדינטות של הוקטור $(0,0,3) \in \mathbf{R}^3$ בבסיס $\vec{a}_1 = (a,b,1), \vec{a}_2 = (1,1,1), \vec{a}_3 = (2,3,1)$ שוות ל-$(1,1,1)$. מצא a,b .

6. אם מטריצה M של האופרטור הלינארי $L:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ בבסיס $A = \{\vec{a}_1 = (1,1,0), \vec{a}_2 = (0,1,0), \vec{a}_3 = (0,1,1)\}$ שווה ל- $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, אז

א. $L((1,2,1)) = (2,5,2)$.

ב. $L((1,2,1)) = (2,1,2)$.

ג. $L((1,2,1)) = (2,3,2)$.

ד. $L((1,2,1)) = (2,2,1)$.

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

התשובה הנכונה היא	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות.

7. אם במטריצה A, מסדר $m\times n$, m עמודות ראשונות מהוות מטריצת-יחידה, אז $\dim(\mathrm{Ker}(A)) < n-m$.

כן	לא

8. אופרטור לינארי $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ המוגדר ע"י הנוסחה $L((x,y))=(x-ay,x+y)$ יהיה הפיך לכל הערכים הממשיים של הפרמטר a.

כן	לא

9. סכום הקואורדינטות של הוקטור $(1,2,3)$ בבסיס $\vec{a}_1=(1,1,1),\vec{a}_2=(1,1,0),\vec{a}_3=(1,0,0)$ שווה ל-1-.

כן	לא

10. המטריצה $\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ שייכת לפרישה לינארית $Sp\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$.

כן	לא

11. קבוצת הוקטורים $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ תהיה בת"ל אם ורק אם $\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{e}_2+\vec{e}_3,\vec{e}_1-\vec{e}_3$ קבוצה בת"ל.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

12 15 **נקודות.**

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A.

13. 15 נקודות.

נתונה פונקציה $L{:}\mathbf{M}_2(\mathbf{R})\to\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(X)=XA$ כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

א. הוכח ש- L העתקה לינארית.

ב. מצא את מטריצתו של L בבסיס הסטנדרטי:

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. מצא את בסיסים של $\mathrm{Ker}(L),\mathrm{Im}(L)$ ודרגה של L.

14. 15 נקודות.

יהי $L{:}V\to V$ אופרטור לינארי שמקיים $L(L(\vec{v}))=L(\vec{v})$ לכל וקטור $\vec{v}\in V$.

א. הוכח ש- $L(\vec{w})=\vec{w}$ לכל $\vec{w}\in\mathrm{Im}(L)$

ב. הוכח ש- $\mathrm{Im}(L)\cap\mathrm{Ker}(L)=\{\vec{0}\},\mathrm{Im}(L)+\mathrm{Ker}(L)=V$.

ג. מה אפשר לומר על מטריצה של L אם $\mathrm{Ker}(L)=\{\vec{0}\}$? נמק את תשובתך.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית, 23.06.99
סמסטר ב', מועד א' .תשנ"ט.
המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 9 נקודות

1. יהיה $V=\mathbf{R}^4$ מרחב אוקלידי עם מכפלה פנימית סטנדרטית:
$(\vec{u},\vec{v})=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4$.
ע"י שיטת גרם-שמידט מצא בסיס אורטוגונלי של מרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית: $x_1+x_2+x_3-x_4=0$.

הבסיס האורטוגונלי	

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים U ו V כאשר
$U=\mathrm{Sp}(\,(2,1,1,\text{-}1),(3,2,2,0)\,),\ V=\mathrm{Sp}(\,(2,1,\text{-}1,1),(3,2,0,2))$.

בסיס של $U\cap V$	
בסיס של $U+V$	

3. נתונה מטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&a&0\\0&b&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים. דרגה של A תהיה מינימלית אם ורק אם :

א. $a=1$ וגם $b=1$.
ב. $a=1$ או $b=1$.
ג. $a\neq 1$ וגם $b\neq 1$.
ד. $a=b$.
ה. בדיוק אחד מהפרמטרים a,b שווה ל-1 .

התשובה הנכונה היא	

4. בין הקבוצות הבאות סמן את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של מרחב השורות של המטריצה הממשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. $\vec{a}_1=(0,0,1,1),\vec{a}_2=(1,2,-2,-1),\vec{a}_3=(1,1,0,0)$.

ב. $\vec{a}_1=(1,1,1,1),\vec{a}_2=(1,2,2,1),\vec{a}_3=(2,2,2,2)$.

ג. $\vec{a}_1=(0,0,1,1),\vec{a}_2=(1,-1,-1,1),\vec{a}_3=(1,0,0,1)$.

ד. $\vec{a}_1=(1,2,2,1),\vec{a}_2=(1,1,1,1)$.

ה. $\vec{a}_1=(0,0,1,1),\vec{a}_2=(1,-1,-1,1)$.

התשובה הנכונה היא	

5. קואורדינטות של הוקטור $(0,1,0)\in\mathbf{R}^3$ בבסיס $\vec{a}_1=(b,1,a),\vec{a}_2=(1,1,1),\vec{a}_3=(3,1,2)$ שוות ל- $(1,1,-1)$. מצא a,b .

6. אם מטריצה M של האופרטור הלינארי $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ בבסיס $A=\{\vec{a}_1=(1,1,0),\vec{a}_2=(0,1,0),\vec{a}_3=(0,1,1)\}$ שווה ל- $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, אז

א. $L((1,2,1))=(2,1,2)$.

ב. $L((1,2,1))=(2,3,2)$.

ג. $L((1,2,1))=(2,2,1)$.

ד. $L((1,2,1))=(2,5,2)$.

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

התשובה הנכונה היא	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל3- נקודות.

7. אופרטור לינארי $L{:}\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ המוגדר ע"י הנוסחה $L((x,y)) = (x-ay, x+y)$ יהיה הפיך לכל הערכים הממשיים של הפרמטר a.

כן	**לא**

8. סכום הקואורדינטות של הוקטור $(1,2,3)$ בבסיס $\vec{a}_1 = (1,1,1), \vec{a}_2 = (1,1,0), \vec{a}_3 = (1,0,0)$ שווה ל1-.

כן	**לא**

9. המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ שייכת לפרישה לינארית $Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

כן	**לא**

10. קבוצת הוקטורים $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ תהיה בת"ל אם ורק אם קבוצה $\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ בת"ל.

כן	**לא**

11. אם במטריצה A, מסדר $m \times n$, m עמודות ראשונות מהוות מטריצת-יחידה, אז $\dim(\mathrm{Ker}(A)) < n - m$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

12 15 **נקודות.**

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.
ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.
ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A.

13. 15 נקודות.

נתונה פונקציה $L:\mathbf{M}_2(\mathbf{R})\to\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(X)=XA$ כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

א. הוכח ש- L העתקה לינארית.
ב. מצא את מטריצתו של L בבסיס הסטנדרטי:

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. מצא את בסיסים של $\mathrm{Ker}(L),\mathrm{Im}(L)$ ודרגה של L.

14. 15 נקודות.

יהי $L:V\to V$ אופרטור לינארי שמקיים $L(L(\vec{v}))=L(\vec{v})$ לכל וקטור $\vec{v}\in V$.

א. הוכח ש- $L(\vec{w})=\vec{w}$ לכל $\vec{w}\in\mathrm{Im}(L)$
ב. הוכח ש- $\mathrm{Im}(L)\cap\mathrm{Ker}(L)=\{\vec{0}\},\mathrm{Im}(L)+\mathrm{Ker}(L)=V$.
ג. מה אפשר לומר על מטריצה של L אם $\mathrm{Ker}(L)=\{\vec{0}\}$? נמק את תשובתך.

בהצלחה !

אלגברה לינארית א', מדעי המחשב,

בחינת סוף סמסטר א' מועד א', תשנ''ט - 99.14.02

משך הבחינה שעתיים וחצי. אין להשתמש במחשבון. אפשר להשתמש בדף נוסחאות אחד מגודל A4. אין לפרק את השאלון. בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון.
התשובות לחלקים א' ו ב' ייבדקו רק <u>בטופס הבחינה</u> והתשובות לחלק ג' ייבדקו <u>במחברות.</u>

<u>חלק א'.</u>
הוראות: בחלק מהשאלות עליך לרשום את התשובה הסופית בתוך התיבה המתאימה, ובחלק האחר עליך לסמן בעיגול את התשובה הנכונה מבין 5 התשובות האפשריות. בין 6 שאלות **<u>יש לענות על 5 שאלות בלבד !</u>** משקל של כל שאלה בחלק זה הוא **10 נקודות**.

1. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+(2+a)z=4+a \\ 3x+ay+3z=6-a \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.
א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

תשובה:	

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פיתרון ?

תשובה:	

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

תשובה:	

2. אם דטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ שווה ל10-, אז דטרמיננטה של

המטריצה $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ 2a_{12} & 2a_{11} & 2a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ שווה ל:

א. 5.
ב. -5.
ג. 20.
ד. -20.
ה. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

3. מצא מספרים ממשיים x, y המקיימים את המשוואה הבאה:

$$(2+i)x+(1+2i)y=1-i$$

תשובה:	$y =$ $\qquad\qquad$ $x =$

4. אם $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, אז השורה הראשונה של A^{-1} שווה ל:

א. $(1,-1,1)$.
ב. $(-1,1,0)$.
ג. $(0,1,-1)$.
ד. $(1,1,0)$.
ה. $(1,-1,-1)$.

5. מצא את כל המטריצות X המקיימות את המשוואה

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובה:
$X =$

6. דטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$ שווה ל:

א. 1.
ב. 0.5.
ג. -0.5.
ד. -2
ה. -1.

<u>חלק ב'.</u>

על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק **"כן"** או **"לא"**. בין 10 שאלות **<u>יש לענות על 9 שאלות בלבד !</u>** משקל של כל אחת מהשאלות **שווה ל-3 נקודות.**

----

7. אם בצורה מדורגת קנונית של מטריצה A יש שורת-אפס, אז למערכת משוואות הומוגנית $AX = 0$ יש אינסוף פתרונות.

כן	לא

8. הדטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix}$$

שווה לאפס אם ורק אם $x = 2$.

כן	לא

9. אם A, B שתי מטריצות המקיימות את השוויון $(A+B)^2 = 0$, אזי בהכרח $A = -B$.

כן	לא

10. המקדם של i במספר $(1-i)^8$ שווה ל-0.

כן	לא

11. מכפלה של שתי מטריצות אלמנטריות היא גם מטריצה אלמנטרית.

כן	לא

12. אם A,B , שתי מטריצות ריבועיות הפיכות מסדר $n\times n$, אז גם המטריצה $A+B$ בהכרח הפיכה.

כן	לא

13.אם $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, אז סכום של כל הרכיבים של $\operatorname{adj}(A)$ שווה ל0- .

כן	לא

14. אם A,B , שתי מטריצות המקיימות $AB=BA$, אז A,B בהכרח מטריצות ריבועיות מאותו הסדר.

כן	לא

15. אם במערכת משוואות הומוגנית מספר המשוואות גדול ממספר הנעלמים, אז למערכת יש פתרון טריביאלי בלבד.

כן	לא

16. לכל מטריצה A מסדר 2×2 מתקיים $|-A| = |A|$.

כן	לא

חלק ג'.

בחלק זה שתי שאלות עליהן לכתוב פתרון **מלא בכתב יד ברור במחברת**.

----

17. 15 נקודות.

מטריצה ריבועית A מסדר n מוגדרת כדלקמן: $A_{ij} = \begin{cases} 2, & i=j \\ -1, & |i-j|=1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ כאשר

האינדקסים i, j משתנים מ-1 עד n.

א. הוכח באינדוקציה ש-$|A| = n+1$.

ב. מצא את x_1 ממערכת משוואות $A\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$.

18. 10 נקודות.

נתונות שתי מטריצות A, B ריבועיות מסדר $n\times n$. הוכח שאם למערכת ההומוגנית

יש פתרון לא טריביאלי, אז לפחות לאחת מהמערכות ההומוגניות $(AB)\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

יש פתרון לא טריביאלי. $A\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = 0, B\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

בהצלחה !

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע. 18.05.2001.
המרצים: ז.בלנוב, מ.מוזיצ'וק.
משך המבחן: 90 דקות.
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס ודף הנוסחאות המצורף לטופס הבחינה.

פתרונות

1. בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית) ש- W תת-מרחב של V.

א. V קבוצה של כל הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$,
W קבוצה של כל הפונקציות $f \in V$ המקיימות $f(0.5) \in \mathbf{Z}$.

קבוצה W איננה תת-מרחב מפני שהיא לא סגורה כלפי כפל בסקלר. ניקח פונקציה $f(x) = 2x$. היא רציפה בקטע $[0,1]$ ו $f(0.5) = 1 \in \mathbf{Z}$, לכן $f \in W$ אבל הפונקציה $\frac{1}{2} f(x) = x$ לא שייכת ל- W מפני ש- $\frac{1}{2} f(0.5) = 0.5 \notin \mathbf{Z}$.

ב. $V = \mathbf{R}^3$, $W = \{(x,y,z) \in V \mid x+y+z=0\}$.

נוכיח ש- W תת-מרחב של V: א. $W \neq \emptyset$ מפני שוקטור-אפס שייך ל- W. ב. <u>סגירות כלפי חיבור.</u> $\left.\begin{matrix}(x,y,z) \in W \Leftrightarrow x+y+z=0 \\ (a,b,c) \in W \Leftrightarrow a+b+c=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x+a)+(y+b)+(z+c)=0 \Rightarrow (x+a,y+b,z+c) \in W$ ג. <u>סגירות כלפי כפל בסקלר.</u> לכל סקלר $\alpha \in F$ מתקיים: $(x,y,z) \in W \Leftrightarrow x+y+z=0 \Rightarrow \alpha(x+y+z)=0 \Rightarrow \alpha x+\alpha y+\alpha z=0 \Rightarrow \alpha(x,y,z) \in W$

2.
א. אשר או סתור $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0)) = \mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.

השוויון $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0)) = \mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$ מתקיים אם ורק אם

$\{(1,2,1,0),(1,1,-1,0)\} \subseteq \mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$ **וגם**
$\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0)) \supseteq \{(-1,2,2,0),(2,3,1,0)\}$.

וקטור $(1,2,1,0)$ שייך ל- $\mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$ אם ורק אם לממ"ל $\begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 3 & | & 2 \\ 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ יש פתרון.

אם נדרג את המטריצה אז נקבל: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 7 & | & 4 \\ 0 & 5 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$. לכן $(1,2,1,0) \notin \mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.

מכאן נובע ש- $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0)) \neq \mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.

ב. הוכח שאם הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$ תלויים ליניארית והוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ בת"ל אז $\bar{a}_4 \in \mathrm{Sp}(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$.

מתוות ליניארית של הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$ נובע שקיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in F$ כך ש- $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\alpha_3\bar{a}_3+\alpha_4\bar{a}_4 = \bar{0}$ ולפחות אחד מהסקלרים שונה מאפס.

נוכיח ש- $\alpha_4 \neq 0$. נניח, בשלילה, ש- $\alpha_4 = 0$. אז $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\alpha_3\bar{a}_3 = \bar{0}$. לפי הנחה הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ בת"ל. לכן $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. סתירה מפני שלפחות אחד מהסקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ שונה מאפס.

מהאי-שוויון $\alpha_4 \neq 0$ נובע שניתן לחלק ב- α_4. אחרי שנחלק את השוויון $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\alpha_3\bar{a}_3+\alpha_4\bar{a}_4 = \bar{0}$ ב- α_4 נקבל:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\bar{a}_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\bar{a}_2+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\bar{a}_3+\bar{a}_4=\bar{0} \Rightarrow \bar{a}_4=-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\bar{a}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\bar{a}_2-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\bar{a}_3 \in \mathrm{Sp}(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$$

מ.ש.ל.

3. הוכח שכל המטריצות $X \in M_2(\mathbf{R})$ המקיימות את $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ מהוות תת-מרחב וקטורי של $M_2(\mathbf{R})$ ומצא את בסיסו.

נוכיח קודם שקבוצת הפתרונות W של המשוואה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא תת-מרחב.

א. מטריצה $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת את המשוואה. לכן $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.

ב. <u>סגירות כלפי חיבור</u>.

$$X \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X = X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$
$$Y \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}Y = Y\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}Y = X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(X+Y) = (X+Y)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow X+Y \in W$$

ג. <u>סגירות כלפי כפל בסקלר</u>.

$$X \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X = X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X\right) = \alpha\left(X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(\alpha X) = (\alpha X)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha X \in W$$

כדי למצוא בסיס של W נפתור את משוואה $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X = X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. נסמן $X = \begin{pmatrix}x&w\\y&z\end{pmatrix}$

ונציב למשוואה. נקבל $\begin{pmatrix}x+y&w+z\\y&z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x&x+w\\y&y+z\end{pmatrix}$. השוויון מתקיים אם ורק אם

$y=0, x=z$. לכן הפתרון הכללי יראה כך $X = \begin{pmatrix}x&w\\0&x\end{pmatrix}$.

מפני ש- $\begin{pmatrix}x&w\\0&x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, מטריצות $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ מהוות בסיס של W.

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע. 14.05.2004.
המרצה: מ.מוזיצ'וק.
משך המבחן: 60 דקות.
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס ודף הנוסחאות המצורף לטופס הבחינה.

1. בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית)
ש- W תת-מרחב של V (בשני הסעיפים V הוא מרחב מעל שדה $\mathbf{R}$)
א. V קבוצה של כל הפולינומים הממשיים.
W קבוצה של כל הפולינומים $f \in V$ המקיימים $f(0.5) \in \mathbf{Z}$.
ב. $V = \mathbf{R}^3$, $W = \{(x,y,z) \in V \mid x+y+z=0\}$.

2.
א. אשר או סתור $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0)) = \mathrm{Sp}(-1,2,2,0),(2,3,1,0))$ (הוקטורים הם

וקטורים ממשיים). .

ב. הוכח שאם הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$ תלויים ליניארית והוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ בת"ל אז $\bar{a}_4$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$.

בהצלחה !

הערה: $\mathbf{Z}$ הוא קבוצה של כל המספרים השלמים.
$\mathbf{R}$ הוא קבוצה של כל המספרים הממשיים.

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע. 12.01.2006
המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק.
משך המבחן: 90 דקות.
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס.

1<u>. 40 נקודות.</u>
בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית)
ש- W תת-מרחב של V.

א. $F=\mathbf{Z}_7$, $V=M_2(\mathbf{Z}_7)$. $W=\{A\in V\,|\,\det(A)=0\}$.

ב. $F=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}_5[x]$, $W=\{p(x)\in V\,|\,p(1)=0,\,p(-1)=0\}$.

2. <u>40 נקודות</u>
אשר או סתור.

א. $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0))=\mathrm{Sp}(-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.

ב. המטריצות $\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ בת"ל.

3. <u>20 נקודות.</u> הוכח שאם U,W תת-מרחבים של המרחב V אז:

$$U+W=U\Leftrightarrow W\le U$$

בהצלחה !

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע. 2002.
המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק.
משך המבחן: 90 דקות.
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס בלבד.

1. בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית) ש- W תת-מרחב של V.

א. V קבוצה של כל הפולינומים ממשיים ממעלה 3 לכל היותר,
W קבוצה של כל הפולינומים $f \in V$ המקיימים $f(0) = f(1) - 1$.

ב. $V = \mathbf{R}^3$, $W = \{(x, y, x+y) \in V \mid x, y \in \mathbf{R}\}$.

א. W איננו תת-מרחב מפני ש- $0(x) \notin W$: $0(0) = 0 \neq -1 = 0(1) - 1$.

ב. W מכיל וקטור-אפס ($x = 0, y = 0$). נבדוק סגירות כלפי חיבור וכפל.

סגירות כלפי חיבור:

$$\left.\begin{matrix}(x, y, x+y) \in W \\ (a, b, a+b) \in W\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x, y, x+y) + (a, b, a+b) = (x+a, y+b, x+y+a+b) =$$
$$= (x+a, y+b, (x+a)+(y+b)) \in W$$

סגירות כלפי כפל:

$$\left.\begin{matrix}(x, y, x+y) \in W \\ \alpha \in \mathbf{R}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha(x, y, x+y) = (\alpha x, \alpha y, \alpha x + \alpha y) \in W$$

---

2. אשר או סתור:

א. $Sp((0,1,1),(1,1,0)) = Sp((1,2,1),(-1,1,2))$.

ב. המטריצות $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}_5)$ בת"ל.

א.

נבדוק קודם ש: $Sp((0,1,1),(1,1,0)) \subseteq Sp((1,2,1),(-1,1,2))$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1 & -1\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

מכאן נובע שכל אחד מהוקטורים $(0,1,1),(1,1,0)$ שייך ל- $Sp((1,2,1),(-1,1,2))$ ולכן $Sp((0,1,1),(1,1,0)) \subseteq Sp((1,2,1),(-1,1,2))$.

נבדוק עכשיו ש: $Sp((1,2,1),(-1,1,2)) \subseteq Sp((0,1,1),(1,1,0))$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

מכאן נובע שכל אחד מהוקטורים $(1,2,1),(-1,1,2)$ שייך ל- $Sp((0,1,1),(1,1,0))$ ולכן $Sp((1,2,1),(-1,1,2)) \subseteq Sp((0,1,1),(1,1,0))$.

ב. המטריצות $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}_5)$ תהיו בת"ל אם ורק אם

למשוואה $\alpha_1\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ יש פתרון טריביאלי בלבד (המקדמים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ שייכים לשדה $\mathbf{Z}_5$). מהשוויון הזה מקבלים את הממ"ל הבאה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&3&2&0\\4&3&2&1&0\\2&1&4&3&0\\3&2&1&4&0\end{array}\right)$$

אחרי הדירוג נקבל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&3&2&0\\0&2&0&3&0\\0&0&3&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

מכאן נובע שלמערכת יש יותר מפתרון אחד ולכן המטריצות הן תלויות ליניארית.

---

3. מצא בסיס כלשהו של המרחב $W=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x=y\}$.

מהגדרת W נובע ש: $W=\{(x,x,z)\mid x,z\in\mathbf{R}\}$. לכן כל וקטור מ- W ניתן לרשום בצורה $(x,x,z)=(x,x,0)+(0,0,z)=x(1,1,0)+z(0,0,1)$. מכאן נובע שהוקטורים $(1,1,0),(0,0,1)$ פורשים את W. הוקטורים $(1,1,0),(0,0,1)$ גם בת"ל, מפני שמהשוויון $\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)=(0,0,0)$ נובע שהסקלרים α,β שווים לאפס.

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע 01.05.2003

משך המבחן: 90 דקות.

על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס בלבד.

1. <u>40 נקודות.</u>

בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית)

ש- W תת-מרחב של V.

א. $W=\{X\in V\mid (1,1)X=(0,0,0)\}$,$V=M_{2\times3}(\mathbf{Z}_3), F=\mathbf{Z}_3$

ב. $W=\{(x,y,z)\in V\mid (x+y)z=0\}$,$V=\mathbf{R}^3, F=\mathbf{R}$.

2. <u>40 נקודות.</u>

אשר או סתור:

א.

$$.\,\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right)$$

ב. הוקטורים $\mathbf{Z}_5^4 \in (1,4,3,2),(4,3,2,1),(3,2,1,4)$ בת"ל.

3. <u>20 נקודות.</u>
שלושה וקטורים $\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in V$ מקיימים את השוויון $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$.
הוכח שאם $\bar{a},\bar{b}$ בת"ל אז גם $\bar{b},\bar{c}$ בת"ל.

בהצלחה !