תרגול נוסף באלגברה לינארית, מתוך המבחנים הקודמים (של פרופסור מוזיצ'וק ואחרים) בשנים שעברו.

מהמבחנים מחקתי את השאלות הקשורות לחומר שעוד לא למדנו נכון להיום 23-5-06 כה איר התשס"ו

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית,
סמסטר ב',מועד א .תשנ"ח.
המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.

חלק א. בחלק זה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני מרחבים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)\ ),\ \ V = \mathrm{Sp}(\ (1,2,2),(2,3,1)\ )$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

3. מרחב הפתרונות של מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

יהיה בעל מימד מקסימלי אם ורק אם :

א. $k = 1$.
ב. $a \neq 2$.
ג. $k \neq 1$.
ד. $a = 2$.
ו. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

4. מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

נפרש ע"י קבוצת הוקטורים:

א. $\vec{a}_1 = (1,2,2,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ב. $\vec{a}_1 = (1,1,-1,-1), \vec{a}_2 = (2,2,-2,-2)$.

ג. $\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ד. $\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,2,1)$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנ"ל איננה פורשת את מרחב הפתרונות.

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות. יש לבחור 9 שאלות מתוך 11.

7. סכום הקואורדינטות של הוקטור (4,6-,2) בבסיס $\vec{e}_3 =$ (1,0,0), $\vec{e}_2 =$(1-,0,1), $\vec{e}_1 =$(0,1,1) שווה ל-3.

כן	לא

8. אם מתוך שלושה וקטורים $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ כל שני וקטורים בת"ל אזי כל שלושה וקטורים גם בת"ל.

כן	לא

9. אם מטריצת-מעבר מבסיס E לבסיס F משולשת עליונה אז מטריצת-מעבר מבסיס F לבסיס E משולשת תחתונה.

כן	לא

10. אם הוקטורים $\vec{f}_1+\vec{f}_2-2\vec{f}_3,\ 2\vec{f}_1-\vec{f}_2-\vec{f}_3,\ \vec{f}_1-2\vec{f}_2+\vec{f}_3$ פורשים את מרחב V, אזי הוקטורים $\vec{f}_2-\vec{f}_3,\ \vec{f}_1-\vec{f}_2$ גם פורשים את V.

כן	לא
כן	לא

12. למשוואה $z^2+z+1=0, z\in\mathbf{C}$ יש 4 פתרונות שונים.

כן	לא

13. איחוד של שתי קבוצות בת"ל גם קבוצה בת"ל.

כן	לא

14. $\mathrm{Sp}(\ (-1,2,1,-2), (-1,-1,1,1)\ ) \subseteq \mathrm{Sp}(\ (-1,1,1,-1), (-1,2,0,-2)\ )$.

כן	לא

16. יהיו V_1, V_2, V_3 שלושה תת-מרחבים של מרחב וקטורי V המקיימים: $V_1 \cup V_2 = V_3$, אזי $\dim(V_1) < \dim(V_3)$ וגם $\dim(V_2) < \dim(V_3)$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

18 10 **נקודות.**

מצא את כל הרכיבים של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & z & 2\\ -1 & 1 & u\\ x & y & v\end{pmatrix}$ אם ידוע שמרחב העמודות של A מוכל במרחב הפתרונות של A.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית,
סמסטר ב',מועד ב' .תשנ"ח.
03.09.98
המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.

חלק א. בחלק זה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

1. אם $A=\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3+2i \end{pmatrix}$ אז $A+A^{-1}$ שווה ל:

א. $\begin{pmatrix} 2i-2 & -2i \\ -2+2i & 4-2i \end{pmatrix}$. **ב.** $\begin{pmatrix} 2i-2 & -2i \\ -2-2i & 4+2i \end{pmatrix}$. **ג.** $\begin{pmatrix} -2i+2 & 2i \\ -2+2i & 4+2i \end{pmatrix}$.

ד. $\begin{pmatrix} 2i+2 & 2i \\ 2+2i & 4+2i \end{pmatrix}$. **ה.** $\begin{pmatrix} -2i+2 & -2i \\ -2-2i & 4-2i \end{pmatrix}$.

התשובה הנכונה היא	

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני מרחבים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,1),(1,1,\text{-}1),(1,3,3)\ ),\ V = \mathrm{Sp}(\ (1,2,2),(2,3,1)\ )$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

3. הדרגה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

תהיה מינימלית אם ורק אם :

א. $k = 1$.

ב. $a \neq 2$.

ג. $k \neq 1$.

ד. $a = 2$.

ה. $a = 3$ או $a = 1$.

התשובה הנכונה היא	

4. בין הקבוצות הבאות בחר את בסיסו של מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

א. $\vec{a}_1 = (1,2,2,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ב. $\vec{a}_1=(1,1,-1,-1),\vec{a}_2=(2,2,-2,-2)$.

ג. $\vec{a}_1=(-1,-1,1,1),\vec{a}_2=(1,1,1,1)$.

ד. $\vec{a}_1=(-1,-1,1,1),\vec{a}_2=(1,2,2,1)$.

ה. אף אחת מהקבוצות הנ"ל איננה בסיס של מרחב הפתרונות.

התשובה הנכונה היא	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות. יש לבחור 9 שאלות מתוך 11.

7. אם U מרחב הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3=0$ ו-V מרחב הפתרונות של המשוואה $x_1-x_2-x_3=0$, אז $U+V=\mathbf{R}^3$.

כן	**לא**

9. אם מטריצת-מעבר מבסיס E לבסיס F משולשת תחתונה אז מטריצת-מעבר מבסיס F לבסיס E משולשת עליונה.

כן	**לא**

10. הפולינומים הממשיים $\vec{a}_1=x^3+x^2+x+1,\vec{a}_2=-x^3+x^2-x+1,\vec{a}_3=x^3-x^2-x-1$ השייכים למרחב הפולינומים $\mathbf{R}_3[x]$ בלתי-תלויים לינארית.

כן	**לא**

12. למשוואה $z^2+z+1=0,z\in\mathbf{C}$ יש 2 פתרונות שונים.

כן	**לא**

13.אם T,S שתי קבוצות בת"ל , אז גם $T\setminus S$ קבוצה בת"ל.

כן	לא

14. $\mathrm{Sp}(\,(-1,2,0,-2),(-1,1,1,-1)\,)\subseteq \mathrm{Sp}(\,(-1,-1,1,1),(-1,2,1,-2)\,)$.

כן	לא

16. אם מטריצה A מגודל 3×2 מכילה 5 אפסים, אז $rank(A)\geq 1$.

כן	לא

17. הוקטור $(1,3,0,1)$ שייך לפרישה לינארית $Sp((1,2,0,1),(1,1,1,0),(1,0,1,0))$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

18 13 **נקודות.**

א. רשום את הבסיס הסטנדרטי S של מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

ב. הוכח שהקבוצות הבאות הן בסיסים של מרחב הפתרונות.

$$A = \{\vec{a}_1 = (-1,-1,1,1), \vec{a}_2 = (-1,3,1,-1)\};\ B = \{\vec{b}_1 = (-1,-3,1,2), \vec{b}_2 = (-2,-4,2,3)\}$$

ומצא את מטריצת מעבר ${}_B T_S$.

(<u>תזכורת:</u> הבסיס הסטנדרטי הוא הבסיס שמורכב מהפתרונות הבסיסיים של מערכת הומוגנית).

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית, 11.06.00

סמסטר ב', מועד א' .תש"ס.

המרצה: פרופ' צ. ארד, ד"ר ז.בלנוב, ד"ר מ.מוזיצ'וק

משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק במחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים ממשיים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}((1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)),\ V = \mathrm{Sp}((-1,2,2),(2,3,1))$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

2. נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי. עבור אילו ערכי a הערך של $rank(A)$ יהיה מינימלי ?

4. אם מערכת משוואות ממשיות

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

פתירה לכל עמודה $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, אז מימד של מרחב הפתרונות

א. קטן מ-2.
ב. גדול מ-2.

ג. שווה ל-2.
ד. שווה ל-3.
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

5. מצא בסיס של מרחב השורות של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ שרכביה שייכם לשדה $\mathbf{F_3}$ וחשב את הקואורדינטות של השורה השלישית בבסיס שמצאת.

בסיס של מרחב השורות	
קואורדינטות של שורה שלישית בבסיס שמצאת	

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל-3 נקודות.

7. $Sp((-1,2,0,2),(-1,1,1,-1)) \subseteq Sp((-2,3,1,1),(0,1,-1,3))$

כן	לא

8. אם S,T שתי קבוצות בלתי-תלויות של וקטורים אז גם $S \cup T$ קבוצה בת"ל.

כן	לא

9. הקואורדינטות של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ בבסיס

$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ שווה ל- $(1,1,1,0)$.

כן	לא

11. אם A בסיס של תת-מרחב U ו B בסיס של תת-מרחב V אז $A\cap B$ בסיס של $U\cap V$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

13. 15 נקודות.

יהי $\mathbf{R}_4[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל-4. בכל אחד מהמקרים הבאים ברר האם קבוצה S היא תת-מרחב של $\mathbf{R}_4[x]$. נמק את תשובתך.

א. S היא קבוצת הפולינומים $f(x)\in\mathbf{R}_4[x]$ בעלי שורש אחד בדיוק.

ב. S היא קבוצת הפולינומים $f(x)\in\mathbf{R}_4[x]$ האי-זוגיים (כלומר $-f(x)=f(-x)$ מתקיים לכל x ממשי).

14. 15 נקודות.

הוכח שלכל תת-מרחב U של מרחב V קיים תת-מרחב W של V כך ש-
$W+U=V, W\cap U=\{\bar{0}\}$.
(רמז: כל בסיס של תת-מרחב ניתן להשלים עד בסיס המרחב כולו)

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 24.06.01
סמסטר ב', מועד א' .תשס"א.
המרצה: ד"ר ז.בלנוב, ד"ר מ.מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. מצא בסיס של החיתוך של שני תת-מרחבים $U\le \mathbf{F}_3^4$ ו $V\le \mathbf{F}_3^4$ כאשר
$U=\mathrm{Sp}((1,2,0,1),(1,1,1,0),(1,0,1,1))$ ו $V=\mathrm{Ker}(A)$, $A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\\2&0&1&1\\0&1&2&1\end{pmatrix}\in M_{4,4}(\mathbf{F}_3)$.

בסיס של $U\cap V$	

2. דרגה של מטריצה ממשית

$$\begin{pmatrix}1&1&1&k\\1&k&3&-2\\1&3&-1&0\end{pmatrix}$$

תהיה מקסימלית אם ורק אם :

א. $k=1$.
ב. $k\neq -1$.

ג. $k \neq 1$.

ד. $k = -1$.

ו. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

התשובה הנכונה היא	

3. בין הטענות הבאות סמן את הטענות הנכונות

	נכון	לא נכון
$(V \le W \wedge \dim(V) = \dim(W)) \Rightarrow V = W$		
$(V \le W \wedge \dim(V) = \dim(W)) \Leftarrow V = W$		
$V \le W \Rightarrow \dim(V) \le \dim(W)$		
$V \le W \Leftarrow \dim(V) \le \dim(W)$		

4. מצא את מטריצת מעבר ${}_A T_B$ כאשר $A = (\bar{a}_1 = (1,1,0), \bar{a}_2 = (0,1,0), \bar{a}_3 = (0,1,1))$ ו $B = (\bar{b}_1 = (0,0,1), \bar{b}_2 = (0,1,1), \bar{b}_3 = (1,1,1))$ שני בסיסים של המרחב ממשי $\mathbf{R}^3$.

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. <u>במקרה שכל 7 שאלות ייענו ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. הפולינומים $-x^3+2x^2+2,\ \ -x^3+x^2+x-1,\ \ -3x^3+3x^2+x+1 \in \mathbf{R}[x]$ תלויים ליניארית.

לא	כן

8. הבסיס של המרחב הטריביאלי $V=\{\bar{0}\}$ מכיל וקטור אחד בלבד.

לא	כן

9. הקואורדינטות של המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ בבסיס
$B_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ שווה ל- $(1,1,1,0)$

לא	כן

11. קבוצת וקטורים $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ תלויה ליניארית אם ורק אם יש בה שני וקטורים פרופורציונאליים.

לא	כן

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

! בהצלחה

מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. אלגברה ליניארית, 01.07.02
סמסטר ב', מועד א' .תשס"ב.
המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. אם שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{F}_5^4, V \le \mathbf{F}_5^4$ מוגדרים ע"י השוויון
$U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,2,0),(2,0,1,2)\ ), V = \mathrm{Sp}(\ (2,0,2,1),(1,1,1,2))$ אז:

א. $\dim(U+V)=4, \dim(U\cap V)=0$.
ב. $\dim(U+V)=2, \dim(U\cap V)=2$.
ג. $\dim(U+V)=3, \dim(U\cap V)=1$.
ד. $\dim(U+V)=3, \dim(U\cap V)=0$.
ה. $\dim(U+V)=4, \dim(U\cap V)=1$.

התשובה הנכונה היא	

2. דרגת המטריצה שרכיביה מספרים ממשיים תהיה מקסימלית

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

אם ורק אם:

א. $a=1$.

ב. אף אחת מהתשובות לא נכונה .

ג. $a=2$.

ד. $a=0.5$.

ה. $a=-1$.

התשובה הנכונה היא	

3. יהי $W \le \mathbf{R}_3[x]$ תת-מרחב המורכב מכל הפולינומים $f(x) \in \mathbf{R}_3[x]$ המקיימים $f(1)=f(0)$. מצא את בסיס של W.

4. נתונה מטריצת-מעבר $_AT_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ מבסיס $B=(\bar{b}_1=(1,2), \bar{b}_2=(1,1))$ לבסיס $A=(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$. חשב את הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2$ (שני הבסיסים הם בסיסי $\mathbf{R}^2$).

6. השלם בסיס $\bar{b}_1=(1,1,1,1,0), \bar{b}_2=(1,-1,1,0,1), \bar{b}_3=(2,1,2,1,1)$ של תת-המרחב $W=\mathrm{Sp}(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$ עד בסיס של כל המרחב $\mathbf{R}^5$.

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. <u>במקרה שכל 7 שאלות ייענו</u> <u>ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. המטריצות ממשיות $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ תלויות ליניארית.

כן	לא

8. אם U,W שני תת-מרחבים של המרחב V אז $U \leq W \Rightarrow \dim(U) \leq \dim(W)$.

כן	לא

9. הקואורדינטות של הפולינום $x^3 + x^2 - 2x + 1 \in \mathbf{R}_3[x]$ בבסיס $p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^3 - x^2, p_3(x) = x^2 - x, p_4(x) = x - 1$ שוות ל- $(1,1,1,0)$

כן	לא

10. מרחב ממשי $V = \{(a,b,b,c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$ נפרש ע"י וקטורים $(1,1,1,0), (0,1,1,1), (1,2,2,1)$.

כן	לא

11. קבוצת וקטורים $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ תלויה ליניארית אם ורק אם יש בה שני וקטורים פרופורציונאליים.

כן	לא

13. אם במטריצה ישנן r עמודות בת"ל, אז דרגתה תהיה r לפחות.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

16. 12 נקודות.
יהיו U,V שני תת-מרחבים של מרחב וקטורי W שמקיימים $U \cap V = \{\bar{0}\}$.
הוכח שאם קבוצה $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\} \subseteq V$ בת"ל, אז הקבוצה $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{u}\}$ תהיה בת"ל לכל וקטור $\bar{u} \in U$ השונה מאפס.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 09.07.2003
סמסטר ב', מועד א' .תשס"ג.
המרצה: פרופ' מ.מוזייצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. מצא בסיסים של $U \cap V, U+V$ כאשר $U \le \mathbf{R}^5, V \le \mathbf{R}^5$ מוגדרים ע"י השוויון
$U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,1,2,1), (2,1,2,1,2), (3,3,3,3,3)\ ), V = \mathrm{Sp}(\ (0,1,2,3,0), (3,2,1,0,3))$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U+V$	

2. דרגת המטריצה שרכיביה מספרים ממשיים תהיה מינימלית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

אם ורק אם:

א. $a=1$.
ב. $a=0$.
ג. $a=-1$.
ד. $a=2$
ה. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

התשובה הנכונה היא	

3. יהי $V \le \mathbf{R}^4$ תת-מרחב המוגדר כדלקמן: $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$.
בין הקבוצות הבאות בחר את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של V.

א. $(1,2,2,1),(1,1,1,1)$.
ב. $(0,0,1,1),(1,-1,-1,1)$.
ג. $(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,2,-2,-1)$.
ד. $(1,1,1,1),(0,0,1,1),(1,0,0,1)$
ה. אף אחת מהקבוצות הנתונות איננה בסיס של V.

4. מצא את מטריצת-מעבר ${}_AT_B$ כאשר $B=(\bar{b}_1=(1,2,2),\bar{b}_2=(3,1,2),\bar{b}_2=(2,0,3))$ ו $A=(\bar{a}_1=(1,0,1),\bar{a}_2=(1,1,2),\bar{a}_2=(1,1,1))$ הם שני בסיסים של $\mathbf{Z}_5^3$.

6. קואורדינטות של וקטור $(2,4,6)\in\mathbf{R}^3$ בבסיס $\bar{b}_1=(a,b,1),\bar{b}_2=(b,a,1),\bar{b}_3=(1,1,1)$ שוות ל- $(1,2,c)$. מצא את a,b,c (a,b,c הם מספרים ממשיים).

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. <u>במקרה שכל 7 שאלות ייענו ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. הפולינומים $p_1(x)=x^3,\ p_2(x)=x^3-x^2,\ p_3(x)=\ x^2-x,\ p_4(x)=x-1\in\mathbf{R}[x]$ תלויים ליניארית.

כן	לא

8. אם U,W שני תת-מרחבים של המרחב V אז $U\le W+U$.

כן	לא

9. אם S,T שתי תת-קבוצות סופיות של מרחב V אז $Sp(S)\le S(T)\Rightarrow S\subseteq T$.

כן	לא

10. מרחב המטריצות $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbf{R}\right\}$ נפרש ע"י המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

כן	לא

11. קבוצת וקטורים $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ תלויה ליניארית אם ורק אם יש בה שני וקטורים פרופורציונאליים.

לא	כן

12. קבוצה המטריצות $V=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})\mid \det(A)=0\}$ היא תת-מרחב של המרחב $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$.

לא	כן

13. אם במטריצה A ישנן r עמודות ת"ל, אז דרגתה תהיה $rank(A)\le r$.

לא	כן

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

16. 12 נקודות.

יהיו U,V שני תת-מרחבים של מרחב וקטורי W שמקיימים $U+V=W$, $U\cap V=\{\bar{0}\}$.
הוכח שאם B בסיס של U ו A בסיס של U, אז $A\cup B$ בסיס של W.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה ליניארית, 25.08.2003
סמסטר ב', מועד ב' .תשס"ג.
המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 8 נקודות

1. מצא בסיסי של $U+V, U\cap V$ כאשר $U \le \mathbf{R}^5, V \le \mathbf{R}^5$ מוגדרים ע"י השוויון
$U = \mathrm{Sp}(\ (1,2,1,2,1),(3,1,3,1,3)\ ), V = \mathrm{Sp}(\ (1,1,1,1,1)\ ,(1,-1,1,-1,1),(1,3,1,3,1))$.

בסיס של $U\cap V$	
בסיס של $U+V$	

3. יהי $V \le \mathbf{R}_3[x]$ תת-מרחב המוגדר כדלקמן: $V = \{p(x) \mid p(-1)=0\}$. בין הקבוצות הבאות בחר את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של V.

א. $x^3+2x^2+2x+1, x^3+x^2+x+1$.
ב. $x+1, x^3-x^2-x+1$.
ג. $x^3+x^2, x+1, x^3+2x^2-2x-1$.
ד. $x^3+x^2+x+1, x^2+x, x^3+1$.
ה. אף אחת מהקבוצות הנתונות איננה בסיס של V.

4. מצא את מטריצת-מעבר ${}_AT_B$ כאשר $B=(\bar{b}_1=(1,2,2), \bar{b}_2=(0,1,0), \bar{b}_3=(2,0,3))$ ו $A=(\bar{a}_1=(1,0,1), \bar{a}_2=(1,1,2), \bar{a}_3=(2,2,3))$ הם שני בסיסים של $\mathbf{Z}_5^3$.

6. קואורדינטות של המטריצה $\begin{pmatrix}16 & 10\\ 12 & 0\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ בבסיס

$B_1=\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}a & 1\\ b & 0\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ שוות ל- $(2,4,0,c)$. מצא את

a,b,c (a,b,c הם מספרים ממשיים).

חלק ב. בחלק הזה יש לבחור 6 שאלות מתוך 7. <u>במקרה שכל 7 שאלות ייענו ייבדקו 6 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 3 נקודות

7. המטריצות $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ תלויות ליניארית.

כן	לא

8. אם U,W שני תת-מרחבים של המרחב V אז $U \geq W+U$.

כן	לא

9. אם S,T שתי תת-קבוצות סופיות של מרחב V אז $Sp(S)\leq S(T) \Leftarrow S\subseteq T$.

כן	לא

10. מרחב הפולינומים $V=\left\{ax^3+bx^2+ax+b \,\middle|\, a,b\in\mathbf{R}\right\}$ נפרש ע"י הפולינומים

$x^3+x^2+x+1,\ 2x^3+x^2+2x+1,\ -x^3+x^2-x+1$.

כן	לא

11. בסיס של המרחב הטריביאלי מכיל וקטור אחד בדיוק.

כן	לא

12. קבוצה המטריצות $V=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})\,|\,\mathrm{tr}(A)=0\}$ היא תת-מרחב של המרחב $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$.

כן	לא

13. אם במטריצה A כל r עמודות בת"ל, אז $rank(A)\ge r$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

16. 12 נקודות.
יהי U תת-מרחב כלשהו של מרחב וקטורי V. הוכח שוקטורים $\bar{a},\bar{b}\in V$ מקיימים $\dim(U+Sp(\bar{a}))<\dim(U+Sp(\bar{b}))$ אם ורק אם $\bar{a}\in U$ ו $\bar{b}\notin U$.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> אלגברה לינארית, 23.06.99
סמסטר ב', מועד א' .תשנ"ט.
המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק
משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' <u>ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה</u>.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. <u>במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד</u>. משקל של כל שאלה: 9 נקודות

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}(\ (1,-1,2,1),(2,0,3,2)\ ),\ \ V = \mathrm{Sp}(\ (-1,1,2,1)\ ,(0,2,3,2))$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

3. נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים. דרגה של A תהיה מינימלית אם ורק אם :

א. $a = b$.
ב. בדיוק אחד מהפרמטרים a,b שווה ל-1- .
ג. $a = 1$ וגם $b = 1$.
ד. $a = 1$ או $b = 1$.
ה. $a \neq 1$ וגם $b \neq 1$.

התשובה הנכונה היא	

4. בין הקבוצות הבאות סמן את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של מרחב השורות של המטריצה הממשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. $\vec{a}_1 = (1,2,2,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.
ב. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,-1,-1,1)$.
ג. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,-2,-1), \vec{a}_3 = (1,1,0,0)$.
ד. $\vec{a}_1 = (1,1,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,2,1), \vec{a}_3 = (2,2,2,2)$.

ה. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,-1,-1,1), \vec{a}_3 = (1,0,0,1)$.

התשובה הנכונה היא	

5. קואורדינטות של הוקטור $(1,0,0) \in \mathbf{R}^3$ בבסיס $\vec{a}_1 = (1,a,b), \vec{a}_2 = (1,1,1), \vec{a}_3 = (1,2,3)$ שוות ל- $(1,-1,1)$. מצא a,b

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל3- נקודות.

7. קבוצת הוקטורים $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ תהיה בת"ל אם ורק אם $\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ קבוצה בת"ל.

כן	**לא**

8. אם במטריצה A, מסדר $m \times n$, m עמודות ראשונות מהוות מטריצת-יחידה, אז $\dim(\mathrm{Ker}(A)) < n - m$.

כן	**לא**

10. סכום הקואורדינטות של הוקטור $(1,2,3)$ בבסיס $\vec{a}_1 = (1,1,1), \vec{a}_2 = (1,1,0), \vec{a}_3 = (1,0,0)$ שווה ל1-.

כן	לא

11. המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ שייכת לפרישה לינארית $Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

בהצלחה !

<u>מחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> **אלגברה לינארית, 23.06.99**

סמסטר ב', מועד א' .תשנ"ט.

המרצה: ד"ר מיכאל מוזיצ'וק

משך המבחן: 2.5 שעות

אפשר להשתמש רק בדף נוסחאות אחד מגודל A4 ומחשבון כיס.
חלקים א' ו ב' ייבדקו רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה.
חלק ג' ייבדק לפי התשובות במחברת.

חלק א. בחלק הזה יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. במקרה שכל 6 שאלות ייענו ייבדקו 5 שאלות ראשונות בלבד. משקל של כל שאלה: 9 נקודות

2. מצא בסיסי של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים U ו V כאשר
$U = \mathrm{Sp}(\,(2,1,1,-1),(3,2,2,0)\,), V = \mathrm{Sp}(\,(2,1,-1,1),(3,2,0,2))$.

בסיס של $U \cap V$	
בסיס של $U + V$	

3. נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים. דרגה של A תהיה מינימלית אם ורק אם :

א. $a = 1$ וגם $b = 1$.
ב. $a = 1$ או $b = 1$.
ג. $a \neq 1$ וגם $b \neq 1$.
ד. $a = b$.
ה. בדיוק אחד מהפרמטרים a,b שווה ל1- .

התשובה הנכונה היא	

4. בין הקבוצות הבאות סמן את קבוצת הוקטורים שהיא בסיס של מרחב השורות של המטריצה הממשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,-2,-1), \vec{a}_3 = (1,1,0,0)$.

ב. $\vec{a}_1 = (1,1,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,2,1), \vec{a}_3 = (2,2,2,2)$.

ג. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,-1,-1,1), \vec{a}_3 = (1,0,0,1)$.

ד. $\vec{a}_1 = (1,2,2,1), \vec{a}_2 = (1,1,1,1)$.

ה. $\vec{a}_1 = (0,0,1,1), \vec{a}_2 = (1,-1,-1,1)$.

התשובה הנכונה היא	

5. קואורדינטות של הוקטור $(0,1,0) \in \mathbf{R}^3$ בבסיס $\vec{a}_1 = (b,1,a), \vec{a}_2 = (1,1,1), \vec{a}_3 = (3,1,2)$ שוות ל- $(1,1,-1)$. מצא a,b .

חלק ב: על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל3- נקודות.

8. סכום הקואורדינטות של הוקטור $(1,2,3)$ בבסיס $\vec{a}_1 = (1,1,1), \vec{a}_2 = (1,1,0), \vec{a}_3 = (1,0,0)$ שווה ל1-.

כן	**לא**

9. המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ שייכת לפרישה לינארית $Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

כן	**לא**

10. קבוצת הוקטורים $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ תהיה בת"ל אם ורק אם $\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{e}_2+\vec{e}_3,\vec{e}_1-\vec{e}_3$ קבוצה בת"ל.

כן	לא

11. אם במטריצה A, מסדר $m\times n$, m עמודות ראשונות מהוות מטריצת-יחידה, אז $\dim(\mathrm{Ker}(A))<n-m$.

כן	לא

חלק ג'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות.

בהצלחה !

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע. 18.05.2001.
המרצים: ז.בלנוב, מ.מוזיצ'וק.
משך המבחן: 90 דקות.
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס ודף הנוסחאות המצורף לטופס הבחינה.

פתרונות

1. בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית)
ש- W תת-מרחב של V.
א. V קבוצה של כל הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$,
W קבוצה של כל הפונקציות $f \in V$ המקיימות $f(0.5) \in \mathbf{Z}$.

קבוצה W איננה תת-מרחב מפני שהיא לא סגורה כלפי כפל בסקלר. ניקח פונקציה $f(x)=2x$. היא רציפה בקטע $[0,1]$ ו $f(0.5)=1\in \mathbf{Z}$, לכן $f\in W$ אבל הפונקציה $\frac{1}{2}f(x)=x$ לא שייכת ל- W מפני ש- $\frac{1}{2}f(0.5)=0.5\notin \mathbf{Z}$.

ב. $V=\mathbf{R}^3$, $W=\{(x,y,z)\in V \mid x+y+z=0\}$.

נוכיח ש- W תת-מרחב של V:
א. $W\neq\varnothing$ מפני שוקטור-אפס שייך ל- W.
ב. <u>סגירות כלפי חיבור.</u>
$$\left.\begin{matrix}(x,y,z)\in W \Leftrightarrow x+y+z=0\\(a,b,c)\in W \Leftrightarrow a+b+c=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow (x+a)+(y+b)+(z+c)=0\Rightarrow (x+a,y+b,z+c)\in W$$
ג. <u>סגירות כלפי כפל בסקלר.</u>
לכל סקלר $\alpha\in F$ מתקיים:
$$(x,y,z)\in W \Leftrightarrow x+y+z=0\Rightarrow \alpha(x+y+z)=0\Rightarrow \alpha x+\alpha y+\alpha z=0\Rightarrow \alpha(x,y,z)\in W$$

2.
א. אשר או סתור $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0))=\mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.

השוויון $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0))=\mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$ מתקיים אם ורק אם $\{(1,2,1,0),(1,1,-1,0)\}\subseteq \mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$ וגם $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0))\supseteq\{(-1,2,2,0),(2,3,1,0)\}$.
וקטור $(1,2,1,0)$ שייך ל- $\mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$ אם ורק אם למע"ל $\begin{pmatrix}-1&2&\mid&1\\2&3&\mid&2\\2&1&\mid&1\\0&0&\mid&0\end{pmatrix}$ יש
פתרון.
אם נדרג את המטריצה אז נקבל: $\begin{pmatrix}-1&2&\mid&1\\0&7&\mid&4\\0&5&\mid&3\\0&0&\mid&0\end{pmatrix}$. לכן $(1,2,1,0)\notin \mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.
מכאן נובע ש- $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0))\neq \mathrm{Sp}((-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.

ב. הוכח שאם הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$ תלויים ליניארית והוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ בת"ל אז $\bar{a}_4\in \mathrm{Sp}(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$.

מתות ליניארית של הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$ נובע שקיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F$ כך ש- $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\alpha_3\bar{a}_3+\alpha_4\bar{a}_4=\bar{0}$ ולפחות אחד מהסקלרים שונה מאפס.

נוכיח ש- $\alpha_4\neq 0$. נניח, בשלילה, ש- $\alpha_4=0$. אז $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\alpha_3\bar{a}_3=\bar{0}$. לפי הנחה הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ בת"ל. לכן $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. סתירה מפני שלפחות אחד מהסקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ שונה מאפס.

מהאי-שוויון $\alpha_4\neq 0$ נובע שניתן לחלק ב- α_4. אחרי שנחלק את השוויון $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\alpha_3\bar{a}_3+\alpha_4\bar{a}_4=\bar{0}$ ב- α_4 נקבל:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\bar{a}_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\bar{a}_2+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\bar{a}_3+\bar{a}_4=\bar{0}\Rightarrow \bar{a}_4=-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\bar{a}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\bar{a}_2-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\bar{a}_3\in \mathrm{Sp}(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$$

מ.ש.ל.

3. הוכח שכל המטריצות $X\in M_2(\mathbf{R})$ המקיימות את $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ מהוות תת-מרחב וקטורי של $M_2(\mathbf{R})$ ומצא את בסיסו.

נוכיח קודם שקבוצת הפתרונות W של המשוואה $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ היא תת-מרחב.

א. מטריצה $X=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ מקיימת את המשוואה. לכן $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$.

ב. <u>סגירות כלפי חיבור.</u>

$$\left.\begin{aligned}X\in W\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\ Y\in W\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}Y=Y\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}Y=X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(X+Y)=(X+Y)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow X+Y\in W$$

ג. <u>סגירות כלפי כפל בסקלר.</u>

$$X \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}X = X\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha\left(\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}X\right) = \alpha\left(X\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}(\alpha X) = (\alpha X)\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha X \in W$$

כדי למצוא בסיס של W נפתור את משוואה $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}X = X\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$. נסמן $X = \begin{pmatrix}x & w\\y & z\end{pmatrix}$

ונציב למשוואה. נקבל $\begin{pmatrix}x+y & w+z\\y & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & x+w\\y & y+z\end{pmatrix}$. השוויון מתקיים אם ורק אם

$y = 0, x = z$. לכן הפתרון הכללי יראה כך $X = \begin{pmatrix}x & w\\0 & x\end{pmatrix}$.

מפני ש- $\begin{pmatrix}x & w\\0 & x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, מטריצות $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ מהוות בסיס של W.

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע. 14.05.2004.
המרצה: מ.מוזיצ'וק.
משך המבחן: 60 דקות.
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס ודף הנוסחאות המצורף לטופס הבחינה.

1. בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית) ש- W תת-מרחב של V (בשני הסעיפים V הוא מרחב מעל שדה $\mathbf{R}$)
   א. V קבוצה של כל הפולינומים הממשיים.
   W קבוצה של כל הפולינומים $f \in V$ המקיימים $f(0.5) \in \mathbf{Z}$.
   ב. $V = \mathbf{R}^3$, $W = \{(x,y,z) \in V \mid x+y+z=0\}$.

2.
   א. אשר או סתור $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0)) = \mathrm{Sp}(-1,2,2,0),(2,3,1,0))$ (הוקטורים הם וקטורים ממשיים). .
   ב. הוכח שאם הוקטורים $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ תלויים ליניארית והוקטורים $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ בת"ל אז $\bar{a}_4$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

בהצלחה !

הערה: $\mathbf{Z}$ הוא קבוצה של כל המספרים השלמים.
$\mathbf{R}$ הוא קבוצה של כל המספרים הממשיים.

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע. 12.01.2006
המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק.
משך המבחן: 90 דקות.
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס.

1. 40 נקודות.
בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית)
ש- W תת-מרחב של V.
א. $F=\mathbf{Z}_7$, $V=M_2(\mathbf{Z}_7)$. $W=\{A\in V \mid \det(A)=0\}$.
ב. $F=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}_5[x]$, $W=\{p(x)\in V \mid p(1)=0,\ p(-1)=0\}$.

2. 40 נקודות
אשר או סתור.
א. $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0))=\mathrm{Sp}(-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.
ב. המטריצות $\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ בת"ל.

3. 20 נקודות. הוכח שאם U,W תת-מרחבים של המרחב V אז:
$$U+W=U \Leftrightarrow W\le U$$

בהצלחה !

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע. 2002.
המרצה: פרופ' מ.מוזיצ'וק.
משך המבחן: 90 דקות.
על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס בלבד.

1. בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית)
ש- W תת-מרחב של V.
א. V קבוצה של כל הפולינומים ממשיים ממעלה 3 לכל היותר,
W קבוצה של כל הפולינומים $f\in V$ המקיימים $f(0)=f(1)-1$.

ב. $V=\mathbf{R}^3$, $W=\{(x,y,x+y)\in V \mid x,y\in\mathbf{R}\}$.

א. W איננו תת-מרחב מפני ש- $0(x)\notin W$: $0(0)=0\neq -1=0(1)-1$.

ב. W מכיל וקטור-אפס ($x=0, y=0$). נבדוק סגירות כלפי חיבור וכפל.

סגירות כלפי חיבור:

$$\left.\begin{matrix}(x,y,x+y)\in W\\(a,b,a+b)\in W\end{matrix}\right\}\Rightarrow (x,y,x+y)+(a,b,a+b)=(x+a,y+b,x+y+a+b)=$$
$$=(x+a,y+b,(x+a)+(y+b))\in W$$

סגירות כלפי כפל:

$$\left.\begin{matrix}(x,y,x+y)\in W\\\alpha\in\mathbf{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha(x,y,x+y)=(\alpha x,\alpha y,\alpha x+\alpha y)\in W$$

---

2. אשר או סתור:

א. $Sp((0,1,1),(1,1,0))=Sp((1,2,1),(-1,1,2))$.

ב. המטריצות $\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{Z}_5)$ בת"ל.

א.

נבדוק קודם ש: $Sp((0,1,1),(1,1,0))\subseteq Sp((1,2,1),(-1,1,2))$.

$$\begin{pmatrix}1&-1&|&0&1\\2&1&|&1&1\\1&2&|&1&0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&|&0&1\\0&3&|&1&-1\\0&3&|&1&-1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&|&0&1\\0&3&|&1&-1\\0&0&|&0&0\end{pmatrix}$$

מכאן נובע שכל אחד מהוקטורים $(0,1,1),(1,1,0)$ שייך ל- $Sp((1,2,1),(-1,1,2))$ ולכן $Sp((0,1,1),(1,1,0))\subseteq Sp((1,2,1),(-1,1,2))$.

נבדוק עכשיו ש:

$Sp((1,2,1),(-1,1,2))\subseteq Sp((0,1,1),(1,1,0))$.

$$\begin{pmatrix}0&1&|&1&-1\\1&1&|&2&1\\1&0&|&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&|&2&1\\0&1&|&1&-1\\0&-1&|&-1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&|&2&1\\0&1&|&1&-1\\0&0&|&0&0\end{pmatrix}$$

מכאן נובע שכל אחד מהוקטורים $(1,2,1),(-1,1,2)$ שייך ל- $Sp((0,1,1),(1,1,0))$ ולכן $Sp((1,2,1),(-1,1,2))\subseteq Sp((0,1,1),(1,1,0))$.

ב. המטריצות $\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{Z}_5)$ תהינה בת"ל אם ורק אם

למשוואה $\alpha_1\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ יש פתרון טריביאלי

בלבד (המקדמים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ שייכים לשדה $\mathbf{Z}_5$). מהשוויון הזה מקבלים את הממ"ל

הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & | & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

אחרי הדירוג נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן נובע שלמערכת יש יותר מפתרון אחד ולכן המטריצות הן תלויות ליניארית.

---

3. מצא בסיס כלשהו של המרחב $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y\}$.

מהגדרת W נובע ש: $W = \{(x,x,z) \mid x,z \in \mathbf{R}\}$. לכן כל וקטור מ- W ניתן לרשום בצורה $(x,x,z) = (x,x,0) + (0,0,z) = x(1,1,0) + z(0,0,1)$. מכאן נובע שהוקטורים $(1,1,0), (0,0,1)$ פורשים את W. הוקטורים $(1,1,0), (0,0,1)$ גם בת"ל, מפני שמהשוויון $\alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1) = (0,0,0)$ נובע שהסקלרים α, β שווים לאפס.

אלגברה ליניארית. מבחן אמצע 01.05.2003

משך המבחן: 90 דקות.

על כל אחת מהשאלות הבאות יש לכתוב תשובות מלאות במחברת. אפשר להשתמש במחשבון כיס בלבד.

1. <u>40 נקודות.</u>

בכל אחד מהמקרים הבאים הוכח או הפרך(תן דוגמה נגדית)

ש- W תת-מרחב של V.

א. $V = M_{2\times 3}(\mathbf{Z}_3), F = \mathbf{Z}_3$, $W = \{X \in V \mid (1,1)X = (0,0,0)\}$

ב. $V = \mathbf{R}^3, F = \mathbf{R}$, $W = \{(x,y,z) \in V \mid (x+y)z = 0\}$.

2. <u>40 נקודות.</u>

אשר או סתור:

א.

$$.\ \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right)$$

ב. הוקטורים $(1,4,3,2),(4,3,2,1),(3,2,1,4)\in\mathbf{Z}_5^4$ בת"ל.

3. <u>20 נקודות.</u>

שלושה וקטורים $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in V$ מקיימים את השוויון $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$.

הוכח שאם $\bar{a},\bar{b}$ בת"ל אז גם $\bar{b},\bar{c}$ בת"ל.

בהצלחה !