

### תרגיל 3

1. מצא את כל המטריצות  $A$  אשר מקימות את המשוואה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. מצא את כל המטריצות  $A$  אשר מקימות את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. פתור את המשוואה המטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$$

4. נתונה מטריצה רבועית  $n \times n$ . נסמן  $A \cdot A = A^2$ ,  $A \cdot A^2 = A^3$ ,  $A \cdot A^k = A^{k+1}$ . נתון כי  $A^2 = 3A - 2I_n$ .

א. בטא את  $A^3$  על ידי  $A$  ו- $I_n$  בלבד.

ב. הוכח באינדוקציה על  $k$  כי מתקיים לכל  $k$  כי:  
 $A^k = (2^k - 1)A - (2^k - 2)I_n$ .

5. מצא את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

6. נתונה מטריצה רבועית  $n \times n$ . נסמן  $A \cdot A = A^2$ ,  $A \cdot A^2 = A^3$ ,  $A \cdot A^k = A^{k+1}$  נתון כי  $A^2 = 4A - 3I_n$ .

א. בטא את  $A^3$  על ידי A ו- $I_n$  בלבד.

ב. הוכח באינדוקציה על k כי מתקיים לכל k כי :  
 $A^k = 0.5[(3^k - 1)A - (3^k - 3)I_n]$

7. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. מצא במחברתך את כל המטריצות הממשיות  $2 \times 2$  שתסומנה A אשר מקימות את המשוואה:

$$A^2 + A + I = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה: מספיק למצוא את המשוואות שמקימים איברי A. אין צורך לפתור.

$$A^T A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. פתור את המשוואה המטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 0 & 4 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

כאשר נתון כי במטריצה X סכום השורות השניה והשלישית שווה ל 5 פעמים השורה הראשונה.

11. פתור את המשוואה המטריציאלית:

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^T$$

12. נתון כי  $A$  היא מטריצה רבועית אשר מקימת את השויון  $A^2 = -2A - 4I$ .

א. בטא את  $A^3$  כצרוף של  $A$  ושל  $I$ . תשובה:

ב. בטא את  $A^4$  כצרוף של  $A$  ושל  $I$ . תשובה:

ג. בטא את  $A^5$  כצרוף של  $A$  ושל  $I$ . תשובה:

ד. בטא את  $A^{33}$  כצרוף של  $A$  ושל  $I$ . תשובה:

ה. בטא את  $A^{43}$  כצרוף של  $A$  ושל  $I$ . תשובה:

13. פתור את המשוואה המטריציאלית:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

14. נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

א. חשב את  $A^2 = A * A$ . תשובה:

ב. חשב את  $A^3 = A * A * A$ . תשובה:

ג. חשב את  $I+A$ . תשובה:

ד. חשב את  $(I+A)^{-1}$ . תשובה:

ה. חשב את  $A^2-A$ . תשובה:

ו. נסח מסקנה.

15. פתור את המשוואה המטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$$

16. מצא את המטריצות  $A$   $2 \times 2$  עם מקדמים ממשיים המקימות את המשוואה  $A^2 = I$ .