1. יהי F שדה כלשהו ונגדיר: $F^n = \{(a_1,a_2,\dots,a_n)/a_1,a_2,\dots,a_n \in F\}$ כמו כן, נגדיר את פעולות החיבור וכפל בסקלר באופן הבא:

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)+(b_1,b_2,\dots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$$

ועבור $k \in F$,

$$k(a_1,a_2,\dots,a_n)=(ka_1,ka_2,\dots,ka_n)$$

הוכיחו ש- F^n ביחס לפעולות שהוגדרו לעיל הוא מרחב וקטורים מעל F.

2. יהי C שדה המרוכבים ונגדיר: $C^n = \{(z_1,z_2,\dots,z_n)/z_1,z_2,\dots,z_n \in C\}$ כמו כן, נגדיר את פעולות החיבור וכפל בסקלר באופן הבא:

$$(z_1,z_2,\dots,z_n)+(w_1,w_2,\dots,w_n)=(z_1+w_1,z_2+w_2,\dots,z_n+w_n)$$

ועבור $k \in R$,

$$k(z_1,z_2,\dots,z_n)=(kz_1,kz_2,\dots,kz_n)$$

הוכיחו ש- C^n ביחס לפעולות שהוגדרו לעיל הוא מרחב וקטורים מעל R.

3. הוכיחו או הפריכו:

3.1. R מרחב וקטורים מעל Q.

3.2. Q מרחב וקטורים מעל R.

3.3. C מרחב וקטורים מעל R.

3.4. R מרחב וקטורים מעל C.

4. הוכיחו ש- $Q(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2}/a,b \in Q\}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות ב-R, הוא מרחב וקטורים מעל Q.

5. הוכיחו או הפריכו:

5.1. $Z[x]$ (אוסף כל הפולינומים שמקדמיהם שלמים) הוא מרחב וקטורים מעל R.

5.2. $C[x]$ (אוסף כל הפולינומים שמקדמיהם מספרים מרוכבים) הוא מרחב וקטורים מעל R.

5.3. $R[x]$ (אוסף כל הפולינומים שמקדמיהם ממשים) הוא מרחב וקטורים מעל C.

6. יהי n טבעי כלשהו ו- R שדה הממשיים.

האם אוסף כל הפולינומים במקדמים ממשיים וממעלה n בדיוק כולל פולינום האפס מהווה מרחב וקטורים מעל R ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר שמוגדרות ב- $R[x]$, אוסף כל הפולינומים במקדמים ממשיים?

7. יהי $V = \{f / f: R \to R\}$, אוסף כל הפונקציות הממשיות ו- R שדה הממשיים.

נגדיר חיבור אשר יסומן ב- $\oplus$ באופן הבא:

אם $f,g \in V$ אז $f \oplus g = f \circ g$ כלומר, $(f \oplus g)(x) = f(g(x))$ לכל x ממשי.

כמו כן, נגדיר כפל בסקלר ממשי:

עבור $f \in V$ ו- $\lambda \in R$ אז $\lambda f: R \to R$ מוגדרת: $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ לכל $x \in R$

בדקו האם V מרחב וקטורים מעל R ביחס להגדרות הנ"ל! נמקו!

8. נסמן את אוסף כל הזוגות הסדורים של מספרים ממשיים חיוביים ב- R_+^2 ויהי R שדה הממשיים. נגדיר פעולות חיבור וכפל אשר נסמן ב- $\oplus$ וב- $\otimes$ בהתאמה באופן הבא:

לכל (a_1,a_2) ו- (b_1,b_2) ב- R_+^2 מגדירים: $(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2)$

ועבור $(a_1,a_2) \in R_+^2$ ו- $\lambda \in R$ מגדירים: $\lambda \otimes (a_1,a_2) = (a_1^{\lambda},a_2^{\lambda})$.

הוכיחו ש- R_+^2 מרחב וקטורים מעל R.

9. הוכיחו או הפריכו!

9.1. יהי R^2 עם החיבור הרגיל (רכיב-רכיב) ונגדיר לכל $\lambda \in R$ ו- (a,b) ב- R^2:

$\lambda(a,b) = (\lambda a,b)$, אז R^2 עם הפעולות הנ"ל הוא מרחב וקטורים מעל R.

9.2. יהי R^2 ונגדיר חיבור וכפל אשר נסמן ב- $\oplus$ וב- $\otimes$ בהתאמה.

לכל (a,b) ו- (c,d): $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,0)$

ועבור $\lambda \in R$, $\lambda \otimes (a,b) = (\lambda a,0)$

אז R^2 עם הפעולות הנ"ל הוא מרחב וקטורים מעל R.

4.1 . מרחב וקטורים (ליניארי)

הגדרה:

יהי F שדה ו- V קבוצה לא ריקה. V הוא **מרחב וקטורים (מרחב ליניארי) מעל השדה F** אם ורק אם מתקיימות הדרישות הבאות:

על V מוגדרת פעולה שנקראת **פעולת החיבור**, מסומנת ב- "+" ומקיימת:

1. **סגירות** ביחס לחיבור: לכל $\underline{u},\underline{v}\in V$ קיים איבר יחיד $\underline{w}\in V$ כך ש- $\underline{u}+\underline{v}=\underline{w}$
2. **קומוטטיביות** החיבור: לכל $\underline{u},\underline{v}\in V \Leftarrow \underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$
3. **אסוציאטיביות** החיבור: לכל $\underline{u},\underline{v},\underline{w}\in V \Leftarrow \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})=(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}$
4. קיום איבר **ניטרלי** ביחס לחיבור: קיים איבר ב- V שמסומן $\underline{0}$ (נקרא אפס) וכך שלכל $\underline{v}\in V \Leftarrow \underline{v}+\underline{0}=\underline{v}$
5. קיום איברים **נגדיים**: לכל $\underline{v}\in V$ קיים איבר ב- V שמסומן $(-\underline{v})$, נקרא האיבר הנגדי ל- $\underline{v}$ ומקיים $\underline{v}+(-\underline{v})=\underline{0}$

בין איברי הקבוצה V לאיברי השדה F מוגדרת פעולה, שנקראת **"כפל בסקלר"**, מסומנת ב- "·" ומקיימת:

6. **סגירות**: לכל $\underline{v}\in V$ ו- $\alpha\in F$ קיים איבר יחיד $\underline{w}\in V$ כך ש- $\alpha\cdot\underline{v}=\underline{w}$
7. **דיסטריבוטיביות** הכפל בסקלר מעל החיבור ב- V:
   לכל $\underline{u},\underline{v}\in V$ ו- $\alpha\in F$ מתקיים: $\alpha(\underline{u}+\underline{v})=\alpha\underline{u}+\alpha\underline{v}$
8. **דיסטריבוטיביות** הכפל בסקלר מעל החיבור ב- F:
   לכל $\underline{v}\in V$ ו- $\alpha,\beta\in F$ מתקיים: $(\alpha+\beta)\underline{v}=\alpha\underline{v}+\beta\underline{v}$
9. **אסוציאטיביות**: לכל $\underline{v}\in V$ ו- $\alpha,\beta\in F$ מתקיים: $(\alpha\beta)\underline{v}=\alpha(\beta\underline{v})$
10. **תכונת הזהות**: לכל $\underline{v}\in V$ מתקיים: $1\cdot\underline{v}=\underline{v}$ (כאשר 1 הוא איבר היחידה של השדה F).

הערות:

1. תכונות החיבור מכונות **"אכסיומות החיבור"** ותכונות הכפל, **"אכסיומות הכפל בסקלר"**.
2. איבריו של מרחב וקטורים מכונים **וקטורים**.