תרגיל

1.

א. אשר או סתור $\mathrm{Sp}((1,2,1,0),(1,1,-1,0))=\mathrm{Sp}(-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.

ב. הוכח שאם הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ תלויים ליניארית והוקטורים $\bar{a}_1,...,\bar{a}_{n-1}$ בת"ל אז $\bar{a}_n$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $\bar{a}_1,...,\bar{a}_{n-1}$.

<u>שאלה 2</u>

<u>הוכח או סתור</u>

א- נתונים מרחב וקטורי V מעל R ושלשה וקטורים {u,v,w} שהם ב"תל. הוקטורים {u+v,v+w,w+u} מהוים קבוצה בת"ל

ב- נתונים מרחב וקטורי V מעל R ושלשה וקטורים {u,v,w} שהם ב"תל. הוקטורים {u+v+w,v+w,w} מהוים קבוצה בת"ל

ג. הוכח שאם הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$ תלויים ליניארית והוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ בת"ל אז $\bar{a}_4\in\mathrm{Sp}(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$.

3. אשר או סתור:

א. $Sp((0,1,1),(1,1,0))=Sp((1,2,1),(-1,1,2))$.

ב. המטריצות $\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{Z}_5)$ בת"ל.

4

אשר או סתור:

א.

$$\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}\right).$$

ב. הוקטורים $(1,4,3,2),(4,3,2,1),(3,2,1,4)\in\mathbf{Z}_5^4$ בת"ל.

5
שלושה וקטורים $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in V$ מקיימים את השוויון $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$.
הוכח שאם $\bar{a},\bar{b}$ בת"ל אז גם $\bar{b},\bar{c}$ בת"ל.

6. א. אשר או סתור $Sp\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)=Sp\left(\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ (המטריצות הן מטריצות ממשיות).
ב. הוכח שאם הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$ בת"ל ו $\bar{a}_5\notin Sp(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4)$
אז גם הוקטורים $\bar{a}_4$ $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4,\bar{a}_5$ בת"ל.

7. אשר או סתור:
א. הוקטורים $(1,1,2,1),(0,1,3,2),(1,2,5,3)$ פורשים את המרחב $V=\{(a,b,b+c,c)\,|\,a,b,c\in\mathbf{R}\}$.
ב. הוקטורים $(1,1,1,1),(1,2,4,3),(1,3,4,2)\in\mathbf{Z}_5^4$ בת"ל.

8. הוכח או הפרך:
א. הוקטורים $\vec{a}_1=1+x^2+2x^3,\vec{a}_2=1+x-x^2,\vec{a}_3=-1+x-3x^3$ השייכים למרחב הפולינומים הממשיים תלוים לינארית.
ב. הסדרות $\vec{a}=\{a_n=1-n\},\vec{c}=\{c_n=-1+2n\},\vec{b}=\{b_n=n\}$ תלויות לינארית.
ג. המטריצות $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ בת״ל.

9. הוכח שאם $n-1$ וקטורים ראשונים מהקבוצה $\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$ בת״ל ו $\bar{v}_1+...+\bar{v}_n=\bar{0}$ אז כל תת-קבוצה של $n-1$ וקטורים תהיה בת״ל.

10. א. הראה שהוקטורים $(1,2,1),(-1,1,2),(2,1,-1)$ פורשים את המרחב $V=\{(a,a+b,b)\ |\ a,b\in\mathbf{R}\}$.
ב. בין שלושת הוקטורים שבחלק א׳ מצא תת-קבוצה בלתי-תלויה שפורשת V.