3.7 תרגילים

1. יהי $\underline{v}$ וקטור ב- R^n.

הוכח שהקבוצה $\{\underline{v}\}$ תלויה לינארית אם ורק אם $\underline{v} = \underline{0}$.

2. א. יהיו $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ וקטורים ב- R^n.

הוכח ש- $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תלויים לינארית אם ורק אם האחד כפולה של השני.

(במלים אחרות, $\underline{u} = a\underline{v}$ ו- a סקלר.)

ב. הוכח ששני וקטורים במישור R^2 תלויים לינארית אם ורק אם הם נמצאים על אותו הישר דרך הראשית.

3. בדוק האם קבוצות הוקטורים הבאות תלויות לינארית:

א. $\{(2,-3),(-4,6)\}$

ב. $\{(2,4),(-1,2)\}$

ג. $\{(1,2,3),(2,4,6)\}$

ד. $\{(-1,0,1),(0,1,1)\}$

ה. $\{(1,2),(-3,4),(5,-6)\}$

4. א. הוכח שאם S קבוצת וקטורים תלויה לינארית ב- R^n ו- T קבוצה המכילה את S אז גם T קבוצת וקטורים תלויה לינארית.

ב. אם T קבוצת וקטורים בלתי תלויה לינארית ו- S קבוצה המוכלת ב- T אז גם S קבוצת וקטורים בלתי תלויה לינארית.

5. בדוק האם קבוצות הוקטורים הבאות תלויות לינארית.

א. $\{(2,1,-1),(0,3,-4),(6,-3,5)\}$

ב. $\{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,-1)\}$

ג. $\{(1,-1,1),(0,1,0),(1,0,1),(2,1,3)\}$

ד. $\{(1,-2,-7,-2),(1,1,2,4),(3,0,-3,6)\}$

ה. $\{(1,2,3),(4,-5,7),(0,0,0)\}$

6. מה צריך להיות ערכו של k כך שקבוצת הוקטורים הבאה תהיה תלויה לינארית.

א. $\{(1+k,1-k),(1-k,1+k)\}$

ב. $\{(2,3,k),(0,k,1),(2,1,1)\}$

ג. $\{(0,1,k),(2,k,3),(-1,0,2),(1,1,k)\}$

ד. $\{(k,1,1),(1,k,1),(1,1,k)\}$

ה. $\{(1,k,1,-1),(2,0,1,k),(1,3,2,1)\}$

7. נתון שהקבוצה $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

בדוק האם הקבוצות הבאות בלתי תלויות לינארית.

א. $\{\underline{v}_1+2\underline{v}_2-\underline{v}_3,\ -\underline{v}_1+2\underline{v}_3,\ 2\underline{v}_2+3\underline{v}_3\}$

ב. $\{3\underline{v}_1-2\underline{v}_2+\underline{v}_3,\ \underline{v}_1-2\underline{v}_3,\ 2\underline{v}_1-2\underline{v}_2+3\underline{v}_3\}$

8. מה התנאים על a, b ו- c כך שהקבוצה הבאה תהיה תלויה לינארית.

א. $\{(2,1,-1),(0,3,4),(a,b,c)\}$

ב. $\{(1,2,-1),(a,b,c),(0,1,3),(1,3,2)\}$

9. מה התנאים על a, b, c ו- d כך שהקבוצה הבאה תהיה בלתי תלויה לינארית.

$\{(1,-1,2,3),(2,1,0,4),(-1,-5,6,1),(a,b,c,d)\}$

10. בדוק האם הקבוצות הבאות בסיס של R^2 ? נמק !

א. $\{(5,-6)\}$

ב. $\{(3,2),(1,1)\}$

ג. $\{(0,-4),(0,1)\}$

ד. $\{(1,2),(3,-4),(0,2)\}$

מיג

4.13 תרגילים

קיץ

.1 יהי $V=R^n$ מרחב וקטורים מעל R.

בדקו עבור כל אחת מהקבוצות הנתונות האם היא תלויה ליניארית, נמקו!

.1.1 $\{(1,2,3),(-1,0,1),(2,1,3),(2,4,5)\}$

.1.2 $\{(1,1,2),(2,0,1),(2,2,4)\}$

.1.3 $\{(1,2,1,3),(-2,1,3,0)\}$

.1.4 $\{(-1,1,3),(1,0,2),(0,1,4)\}$

.1.5 $\{(1,0),(0,0)\}$

.2 יהי $V=R^n$ מרחב וקטורים מעל R.

מה צריך להיות ערכו של k על מנת שקבוצת הוקטורים הנתונה תהיה תלויה ליניארית?

2.1 $\{(1+k,1-k),(1-k,1+k)\}$

2.2 $\{(2,3,k),(0,k,1),(2,1,1)\}$

2.3 $\{(1,k,2),(2,1,k),(2,3,k),(0,4,5)\}$

2.4 $\{(1,k,1,-1),(2,0,1,k),(1,3,2,1)\}$

.3 נתונה $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ קבוצת וקטורים בלתי תלויה ליניארית ב- V, מרחב וקטורים מעל שדה F, בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית:

.3.1 $\{\underline{v}_1+2\underline{v}_2-\underline{v}_3,-\underline{v}_1+2\underline{v}_3,2\underline{v}_2+3\underline{v}_3\}$

.3.2 $\{3\underline{v}_1-2\underline{v}_2+\underline{v}_3,\underline{v}_1-2\underline{v}_3,2\underline{v}_1-2\underline{v}_2+3\underline{v}_3\}$

.3.3 $\{\underline{v}_1-\underline{v}_2,\underline{v}_2-\underline{v}_3,\underline{v}_1-\underline{v}_3\}$

.4 נתונים הוקטורים $(\sqrt{2},2)$, $(1,\sqrt{2})$

.4.1 האם הוקטורים הנתונים תלויים ליניארית ב- R^2 מעל R?

.4.2 האם הוקטורים הנתונים תלויים ליניארית ב- R^2 מעל Q?

.5 האם הפולינומים $x^2+x-3,\ 3x^2-2x+1,\ 4x-5$ בלתי תלויים ליניארית ב- $R[x]$ (מעל R)?

.6 הוכיחו או הפריכו:

.6.1 הוקטורים $(1,i,i-1)$ ו- $(i+1,-1+i,-2)$ בלתי תלויים ליניארית ב- C^3 מעל C.

תרגיל

1.

א. אשר או סתור $Sp((1,2,1,0),(1,1,-1,0)) = Sp(-1,2,2,0),(2,3,1,0))$.

ב. הוכח שאם הוקטורים $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ תלויים ליניארית והוקטורים $\overline{a}_1,...,\overline{a}_{n-1}$ בת"ל אז $\overline{a}_n$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $\overline{a}_1,...,\overline{a}_{n-1}$.

<u>שאלה 2</u>

<u>הוכח או סתור</u>

א- נתונים מרחב וקטורי V מעל R ושלשה וקטורים $\{u,v,w\}$ שהם ב"תל. הוקטורים $\{u+v,v+w,w+u\}$ מהוים קבוצה בת"ל

ב- נתונים מרחב וקטורי V מעל R ושלשה וקטורים $\{u,v,w\}$ שהם ב"תל. הוקטורים $\{u+v+w,v+w,w\}$ מהוים קבוצה בת"ל

ג. הוכח שאם הוקטורים $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4$ תלויים ליניארית והוקטורים $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3$ בת"ל אז $\overline{a}_4 \in Sp(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3)$.

3. אשר או סתור:

א. $Sp((0,1,1),(1,1,0)) = Sp((1,2,1),(-1,1,2))$.

ב. המטריצות $\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}_5)$ בת"ל.

4

אשר או סתור:

א.

$$Sp\left(\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right) = Sp\left(\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}\right).$$

ב. הוקטורים $(1,4,3,2),(4,3,2,1),(3,2,1,4) \in \mathbf{Z}_5^4$ בת"ל.

5
שלושה וקטורים $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in V$ מקיימים את השוויון $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$.
הוכח שאם $\bar{a},\bar{b}$ בת"ל אז גם $\bar{b},\bar{c}$ בת"ל.

6. א. אשר או סתור $Sp\left(\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)=Sp\left(\begin{pmatrix}-1&2\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}\right)$ (המטריצות הן מטריצות ממשיות).
ב. הוכח שאם הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4$ בת"ל ו $\bar{a}_5\notin Sp(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4)$
אז גם הוקטורים $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4,\bar{a}_5$ בת"ל.

7. אשר או סתור:
א. הוקטורים $(1,1,2,1),(0,1,3,2),(1,2,5,3)$ פורשים את המרחב $V=\{(a,b,b+c,c)\mid a,b,c\in\mathbf{R}\}$.
ב. הוקטורים $(1,1,1,1),(1,2,4,3),(1,3,4,2)\in\mathbf{Z}_5^4$ בת"ל.

8. הוכח או הפרך:
א. הוקטורים $\vec{a}_1=1+x^2+2x^3,\vec{a}_2=1+x-x^2,\vec{a}_3=-1+x-3x^3$ השייכים למרחב הפולינומים הממשיים תלוים לינארית.
ב. הסדרות $\vec{a}=\{a_n=1-n\},\vec{c}=\{c_n=-1+2n\},\vec{b}=\{b_n=n\}$ תלויות לינארית.
ג. המטריצות $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&1\end{pmatrix}$ בת"ל.

9. הוכח שאם $n-1$ וקטורים ראשונים מהקבוצה $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$ בת"ל ו $\bar{v}_1+\dots+\bar{v}_n=\bar{0}$ אז כל תת-קבוצה של $n-1$ וקטורים תהיה בת"ל.

10. א. הראה שהוקטורים $(1,2,1),(-1,1,2),(2,1,-1)$ פורשים את המרחב $V=\{(a,a+b,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$.
ב. בין שלושת הוקטורים שבחלק א' מצא תת-קבוצה בלתי-תלויה שפורשת V.