

תרגיל דטרמיננטה

1. א.מצא את כל המטריצות A מסדר 3×3 המקיימות את התנאים הבאים:
 $a_{3,1}=3, a_{3,2}=1, a_{3,3}=1$ וכן מתקיימים הדטרמיננטים הבאים של המינורים מ- A
 $\det(M_{1,1})=3, \det(M_{1,2})=-1, \det(M_{1,3})=-10,$
 $\det(M_{2,1})=-2, \det(M_{2,2})=-14, \det(M_{2,3})=-8$
ב.מצא את כל הדטרמיננטים האפשריים של כל המטריצות שמצאת בסעיף א.

2. נתונה A_n מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי: לכל $1 \leq i, j \leq n$

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & |i-j|=1 \\ 2 & i-j=0 \\ 0 & |i-j|>1 \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4$.
ב.כתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.
ג.מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .

3. א.מצא את כל המטריצות A מסדר 3×3 המקיימות את התנאים הבאים:
 $a_{3,1}=5, a_{3,2}=6, a_{3,3}=7$ וכן מתקיימים הדטרמיננטים הבאים של המינורים מ- A
 $\det(M_{2,1})=-4, \det(M_{2,2})=-8, \det(M_{2,3})=-4$ $\det(M_{1,1})=5, \det(M_{1,2})=3, \det(M_{1,3})=-1,$
ב.מצא את כל הדטרמיננטים האפשריים של כל המטריצות שמצאת בסעיף א.

4. נתונה מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & i - j = 1 \\ i & i - j = 0, -1 \\ 0 & |i - j| > 1 \end{cases}$$

- א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4$.
 ב. כתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.
 ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .

5. נתונה מטריצה A מסדר 3×3 ונתון כי:

$$a_{1,1}=1, a_{1,2}=2, a_{1,3}=3, a_{2,3}-a_{2,2}=1$$

המינורים מ- A $M_{1,1}=-8, M_{1,2}=10, M_{1,3}=-3, M_{3,1}=-3, M_{3,2}=6, M_{3,3}=-3$

6. נתונה מטריצה רבועית A_n מסדר $n \times n$ וידוע כי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & |i - j| = 1 \\ 0 & |i - j| \neq 1 \end{cases}$$

כתוב את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n . נמק את צעדיך.

7. נתונה מטריצה A מסדר 6×6 אשר מוגדרת על ידי הנוסחה: $A_{i,j} = \max\{i+j-1, 5\}$
 עבור $1 \leq i, j \leq 6$. חשב את $\det(A)$

8. נתונה מטריצה A מסדר 4×4 אשר מוגדרת על ידי הנוסחה: $A_{i,j} = i^2 - j^2$
 עבור $1 \leq i, j \leq 4$. חשב את $\det(A)$.

9. נתונים מטריצה A בעלת ממד 4×4 המוגדרת על ידי:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & j = 1, 1 \leq i \leq 4 \\ 1 + x_i^{j-1} & 2 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq 4 \end{cases}$$

כתוב את המטריצה A בצורה מפורשת וחשב את $\det(A)$.

10. נתונה A_n מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 7 & i = j \\ 2 & i = j + 1 \\ 3 & i = j - 1 \\ 0 & |i - j| > 1 \end{cases}$$

א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4$.
 ב. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.
 (שים לב שהסעיף הבא קשה יותר ושוה רק ארבע נקודות, ואולי כדאי לך לחזור אליו לאחר סיום שאר המבחן) ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .

11. נתונה מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 5 & i = j \\ 4 & i = j + 1 \\ 1 & i = j - 1 \\ 0 & |i - j| > 1 \end{cases}$$

א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4$.
 ב. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.
 (שים לב שהסעיף הבא קשה יותר ושוה רק ארבע נקודות, ואולי כדאי לך לחזור אליו לאחר סיום שאר המבחן) ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .

11. נתונה מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 10 & i = j \\ 3 & |i - j| = 1 \\ 0 & |i - j| > 1 \end{cases}$$

א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4$.
 ב. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.
 (שים לב שהסעיף הבא קשה יותר ושוה רק ארבע נקודות, ואולי כדאי לך לחזור אליו לאחר סיום שאר המבחן) ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .

$$12. \text{נתונות המטריצות } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & p \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+p \\ g+a & h+b & p+c \end{pmatrix}$$

א. חשב את $\det(A)$. ב. חשב את $\det(B)$. ג. מצא קשר בין $\det(A)$ ובין $\det(B)$.

שאלה 13

נתונה A_n מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 5 & j = i \\ 4 & j = i + 1 \\ 1 & j = i - 1 \\ 0 & 1 < |j - i| \end{cases}$$

א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4,5,6$. ב. חשב את $\det(A_n)$ עבור $n=1,2,3,4$. ג. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$. ד. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .

14. נתונה מטריצה A מעל שדה $F = \mathbb{R}$ שהדטרמיננט שלה הוא 1, ונתונה

$$A^* = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{המטריצה הצמודה}$$

מצא את כל אברי A .

שאלה 15

נתונים מטריצה A בעלת ממד 4×4 המוגדרת על ידי:

$$A_{i,j} = x_i^{j+1}, 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq 4$$

כתוב את המטריצה A בצורה מפורשת וחשב את $\det(A)$.

16. נתונה מטריצה רבועית A 5×5 ונתון כי $\det(A) = 2$ אז $\det(A^*) = 16$.

לא נכון

נכון
נמוק קצר

17. נתונה מטריצה רבועית B 3×3 ונתון כי $\det(B) = 2$ אז $\det(B^{-1}) = \sqrt{2}$.

לא נכון

נכון
נמוק קצר

18. נתונות מטריצה רבועיות C, D המקימות כי $C^2 = D^2 = 0$ אז $(CD)^2 = 0$.

לא נכון

נכון
נמוק קצר

19. נתונה מטריצה A מעל שדה F בעלת ממד 3×3 שכל איבריה שונים $m=0$

וידוע כי המטריצה הצמודה A^* (תזכורת המטריצה הצמודה כוללת בתוכה סימן) של המטריצה A מקיימת $a_{2,1}^* = a_{2,2}^* = a_{2,3}^* = a_{3,1}^* = a_{3,2}^* = a_{3,3}^* = 0$.

מצא את כל אברי A . (יש אינסוף פתרונות). מצא את אברי המטריצה

$$A^*$$

הצמודה.

רמז חשוב על $F = \mathbb{R}$

20. נתונים מטריצה A בעלת ממד 4×4 המוגדרת על ידי:

$$A_{i,j} = 2 + x_i^{3j-3}, 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq 4$$

כתוב את המטריצה A בצורה מפורשת וחשב את $\det(A)$.

21. נתונה מטריצה 3×3 המקימת כי במטריצה הצמודה A^* יש שורת אפסים. אז A אינה הפיכה.

נכון לא נכון . נמק

22. נתון שיוון של מכפלת מטריצות $AB=0$. אז אחת מ- A או B חיבת להיות מטריצת ה-0.

נכון לא נכון . נמק

23. כל איבריה של מטריצה רבועית מסדר 4×4 נכפלו ב-2. הדטרמיננט של המטריצה שהתקבלה הוא פי 16 מזו של המקורית.

נכון לא נכון . נמק

24.

$$A = \begin{pmatrix} a+t & b+c+u+v & b+c+u+v & d+w \\ e & f & f+g & h \\ p & q+v & q+v & s \\ a & b+c+u+v & b+c+u+v & d+w \end{pmatrix}$$

נתונה המטריצה

השב את $\det(A)$

25. נתונה A_n מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 10 & i = j \\ 2 & i = 2k - 1, j = 2k, k \in N \\ 3 & i = 2k - 1, j = 2k - 2, k \in N \\ 0 & (i \neq 2k - 1) \vee [(i = 2k - 1) \wedge (1 < |i - j|)] \end{cases}$$

א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4,5,6$.
 ב. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$. ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .

26. אם A ו B הן שתי מטריצות הפיכות אז $(A+B)^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$.

נכון לא נכון . נמק

27. אם A הפיכה אז היא ההפכית של A^* .

נכון לא נכון . נמק

27. נתונה מטריצה רבועית A ונתון כי ב A^* יש שתי שורות מתיחסות. אז A איננה הפיכה.

נכון לא נכון . נמק

28.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 & x^5 \\ x^2 & x^4 & x^6 & x^{10} \\ x^3 & x^6 & x^9 & x^{15} \end{pmatrix} \text{ נתונה המטריצה}$$

מצא עבור x אלו ערכי x היא הפיכה.

29.

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 & 3x+1 & 4x+1 \\ x & 2x & 3x & 4x \\ x^2+x & 4x^2+2x & 9x^2+3x & 16x^2+4x \\ x^3+x & 8x^3+2x & 27x^3+3x & 64x^3+4x \end{pmatrix} \text{ נתונה המטריצה}$$

חשב עבורה את הדטרמיננט ומצא עבור x אלו ערכי x היא הפיכה.