תרגיל דטרמינוטות

1. $A_{ij} = \min(i+j-1,6)$ אשר האינדקסים i, j משתנים מ-1 עד 6 , אז $|A|$ שווה ל:

2. מטריצה B מתקבלת מהמטריצה
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix}$$
ע״י סיבוב ב180- מעלות כלפי מרכז המטריצה. מצא $|B|$ אם ידוע ש- $|A|=100$.

3.
הוכח: אם רכיביה של מטריצה A מספרים שלמים, אז רכיביה של A^{-1} יהיו שלמים אם ורק אם $|A|=\pm 1$.

4. מטריצה ריבועית A מסדר n מוגדרת כדלקמן: $A_{ij} = \begin{cases} a+1, & i=j \\ \sqrt{a}, & |i-j|=1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

כאשר האינדקסים i, j משתנים מ-1עד n (a הוא פרמטר ממשי, $a>1$).

א. הוכח באינדוקציה ש- $|A| = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

ב. מצא את x_2 ממערכת משוואות $A\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. אם דטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ שווה ל10-, אז דטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ 2a_{12} & 2a_{11} & 2a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ שווה ל:

6. דטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$ שווה

7.מטריצה ריבועית A מסדר n מוגדרת כדלקמן: $A_{ij}=\begin{cases} 2, & i=j \\ -1, & |i-j|=1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ כאשר

האינדקסים i,j משתנים מ-1 עד n.

א. הוכח באינדוקציה ש-$|A|=n+1$.

ב. מצא את x_1 ממערכת משוואות $A\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.נתונות שתי מטריצות A,B ריבועיות מסדר $n\times n$. הוכח שאם למערכת

ההומוגנית $(AB)\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=0$ יש פתרון לא טריביאלי, אז לפחות לאחת מהמערכות

ההומוגניות $B\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=0, A\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=0$ יש פתרון לא טריביאלי.

9 .

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה מסדר n:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

10 . מצא ערך של a אם ידוע שלממ"ל $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ יש פתרון

יחיד שבו $x_1=x_2$.

11 . חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה מסדר n :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & .... & 1 \\ . & . & . & .... & . \\ 1 & 1 & 1 & .... & 0 \end{pmatrix}$$

.12

חשב את דטרמיננטה מסדר n :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 3 & 2 & 1 & ... & 1 \\ 3 & 3 & 2 & .... & 1 \\ . & . & . & .... & . \\ 3 & 3 & 3 & .... & 2 \end{vmatrix}$$

13.מצא את ערך של a אם ידוע שלממ"ל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד שבו $x=2$.

.14

הוכח שהדטרמיננטה $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$ שווה ל-

$$(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d) .$$

.15

חשב את הדטרמיננטה הבאה :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

16.מצא את ערך של a אם ידוע שלממ"ל $\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד שבו $x = z$.

17

הוכח שאם מטריצה ריבועית A מסדר n מקיימת $A^3 = 0$ אז $I_n + A$ מטריצה הפיכה.

18

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. מסדר n

19

חשב את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix} a^6 & b^6 & c^6 & d^6 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \\ a^8 & b^8 & c^8 & d^8 \end{vmatrix}$$

20

מצא את ערך של a אם ידוע שלממ"ל $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד שבו $x = y$.

21

תהיה A מטריצה ריבועית מסדר 3. הוכח ש $A^*=0$ אם רק אם כל שתי שורות של A פרופורציונאליות זו לזו.

22

הוכח שאם מטריצה ריבועית A מסדר n מקיימת $A^2=A$ אז I_n+A מטריצה הפיכה.

23. מצא את כל המטריצות X המקיימות את השוויון

$$Adj\left(X\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}X^T$$

24.חשב את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\c&d&a&b\\d&c&b&a\end{vmatrix}$$

25.חשב את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$$

26.הוכח שמטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}x&y&a&b\\z&w&c&d\\r&s&0&0\\t&u&0&0\end{pmatrix}$ הפיכה אם ורק אם המטריצות $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r&s\\t&u\end{pmatrix}$ הפיכות.

27.תהיינה $A\in M_{n\times n}(\mathbf{R}),B\in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. הוכח שאם למערכת הומוגנית $(AB)X=O$ יש פתרון לא טריביאלי אז לפחות לאחת מהמערכות $BX=O,AX=O$ יש פתרון לא טריביאלי.

28.הוכח שמטריצה ריבועית A מסדר n הפיכה אם ורק אם A^* הפיכה.

29.תהיינה $A,B\in M_n(\mathbf{R})$ מטריצות הפיכות כלשהם. הוכח ש $(AB)^*=A^*B^*$.

30.חשב את דטרמיננטה מסדר n :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & .... & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & a_3 & .... & 1 \\ . & . & . & .... & . \\ 1 & 0 & 0 & .... & a_n \end{vmatrix}$$

31.חשב את ההדטרמיננטה $\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{d^2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

32.מצא את ערך של a אם ידוע שלממ"ל $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד

שבו $x=4$.

33.חשב את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

34.מצא את x מהמערכת $\begin{cases} a^2x+ay+a^3z=1 \\ b^2x+by+b^3z=1 \\ c^2x+cy+c^3z=1 \end{cases}$ לפי שיטת קרמר (a,b,c מספרים

ממשים שונים זה מזה).

35.נתונה מטריצה $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & . & . & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & . & . & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & . & . & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & . & . & 2 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & 2 & 2 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$ מסדר n. הוכח כי

$|A_n| = -(n-1)(-2)^{n-2}$.

36.חשב את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

37.

מצא את x מהמערכת $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$ לפי שיטת קרמר (a,b,c מספרים ממשים שונים זה מזה).

38.

נתונה מטריצה $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & 2 \end{pmatrix}$ מסדר n. הוכח באינדוקציה כי

$|A_n| = (5-n)2^{n-2}$.