



מבחן סוף בקורס לוגיקה ותכנות לוגי.

מועד א יום א ז אב התשס"ז, 22-7-2006.

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- המבחן הוא ללא חומר עזר וללא מחשבוני, למעט דפי הנוסחאות המצורפים.
- המחברת משמשת לטיוטה בלבד ולא תבדק. התשובות שתבדקנה הן אלו שתתקבלנה על ידי הקפת האפשרות הנכונה בגוף השאלון, או על ידי כתיבת תשובה בשאלון.
- המבחן כולל 5 שאלות. על כלן יש לענות בגוף השאלון.
- שאלה ראשונה בת 5 סעיפים השווים 7 נקודות כל-אחד, סה"כ 35 נקודות ועוסקת במודלים.
- שאלה שנייה בת משקל 25 נקודות. ועוסקת בתחשיב פסוקים.
- שאלה 3 שאלת מעקב בפרולוג בת 17 סעיפים, כל אחד שווה נקודה סה"כ 17 נקודות.
- שאלה 4 כוללת כתיבת קוד פרולוג ומשקלה 14 נקודות
- שאלה 5 אודות החומר בקריאה עצמית ומשקלה 10 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1, אודות מודלים.

נתונה רשימה של פסוקים:

$$1. \forall X \forall Y [\{K(X, Y)\} \rightarrow \{\overline{K(Y, X)}\}].$$

$$2. \forall X [\{S(X)\} \rightarrow \exists Y \{\overline{S(Y)} \wedge K(X, Y)\}].$$

א. כתוב כאן מודל מינימלי בעל עולם לא ריק המקיים את תכונות 1-2.

נביט על התכונה הבאה:

$$3. \exists X \exists Y (K(X, Y) \wedge S(X) \wedge \overline{S(Y)}).$$

ב. כתוב כאן מודל מינימלי. המקימים את תכונות 1-3.

ג. כתוב כאן מודל מינימלי אשר מקים את תכונות 1-2 אך לא את תכונות 1-3.

נביט על התכונה הבאה:

$$4. \forall X[\overline{S(X)} \rightarrow \exists Y\{S(Y) \wedge K(X, Y)\}].$$

ד. כתוב כאן מודל מינימלי. המקימים את תכונות 1-4.

ה. כתוב כאן מודל מינימלי אשר מקים את תכונות 1-3 אך לא את תכונות 1-4.

שאלה 2, אודות טעונים תקפים.

הבט ברשימת ההנחות הבאות:

$$1. \forall X \forall Y \forall Z [K(X, Y, Z) \rightarrow (\overline{K(Z, X, Y)} \wedge \overline{K(X, Z, Y)})].$$

$$2. \forall X \forall Y (\overline{K(X, Y, Y)}).$$

$$3. \forall X \forall Y \forall Z (K(X, Y, Z) \rightarrow (\exists A \exists B (K(Z, A, B)))).$$

ובמסקנות:

$$a) \exists X \exists Y \exists Z (K(X, Y, Z) \rightarrow K(Y, X, Z)).$$

$$b) \exists X \exists Y \exists Z (K(X, Y, Z)).$$

$$c) \exists X \exists Y \exists Z (K(Y, X, Z)).$$

ובמסקנה:

א. יש לרשימת ההנחות מודל בן שלשה אברים ושני יחסי K.

עבור כל אחת מהמסקנות a, b, c ו-א, האם יש לה טעון תקף? אם כן הוכח, אם לא תן מודל נגדי.

תשובה:

שאלה 3, פרולוג.

הבט בקוד הבא

a([],[],[]).%1

a([X],[X],[]).%2

a([X,Y],[X,Y],[]).%3

a([X,Y,Z],[X,Y],[Z]).%4

a([X,Y,Z,W|U],[X,Y|V],[Z,W|K]):-a(U,V,K).%5

b([],[],[]).%6

b([X],[],[X]).%7

b([X],[Y],[X,Y]).%8

b([X,Y],[Z],[X,Y,Z]).%9

b([X,Y],[],[X,Y]).%10

b([X,Y|K],[Z,W|L],[X,Y,Z,W|M]):-b(K,L,M).%11

c([],[]).%12

c([X],[X]).%13

c([X,Y|Z],[Y,X|W]):-c(Z,W).%14

d(X,Y):-a(X,C,D),c(C,E),b(E,D,Y).%15

ונתונה השאלתא:

$d([1,2,3,4,5,6,7,8,9],A)$.

זכור כי תנועה היא פתיחת שאילתא פנימית או חיצונית אשר מבצעת חפוש לאורך הקוד ועוצרת מול שורת קוד מתאימה. לכל סעיף, כתוב את השאלתא המתאימה, ומול איזו שורת קוד היא עוצרת. באם התכנית כלה עצרה והדפיסה, הנח שתקתק הסימן ; ושהתכנית המשיכה לרוץ. אם התכנית סימה אחרי k שאילתות ושואלים אותך על שאילתא $k+m$ כתוב-'אין כזו שאילתא-התכנית סימה'.

1-תנועה ראשונה.

2. תנועה שניה.

3-תנועה שלישית.

4. תנועה רביעית.

5-תנועה חמישית.

6. תנועה שישית.

7-תנועה שביעית.

8. תנועה שמינית.

9. תנועה תשיעית.

10. תנועה עשירית.

11-תנועה אחד עשר.

12. תנועה שנים עשר.

13- מהו הפלט הראשון כלפי המשתמש? אם אין כזה רשום שאין.

14- כתוב את מספרי שורות הקוד מולם התכנית לא עצרה כלל.

15 כתוב את מספרי שורות הקוד מולם התכנית עצרה פעם אחת בדיוק.

16 כתוב את מספרי שורות הקוד מולם התכנית עצרה פעמים בדיוק.

שאלה 4

רשם כאן קוד פרולוג אשר מקבל כקלט רשימה סדורה של איברים, ומחזיר בדיוק את אותה שרשרת שבה הוחלפו האיברים הראשון והשני, החמישי והשישי וכדומה, ושאר האיברים נשארו במקומותיהם.

דוגמא

`mevukash([a,b,c,d,e,f],X).`

`X=[b,a,c,d,f,e].`

שאלה 5

נתונה סדרה $f(n)$ המקימת את נוסחת הנסיגה $f(n)=9f(n-1)-23f(n-2)+15f(n-3)$ ואת תנאי ההתחלה $f(0)=1, f(1)=3, f(2)=17$. מצא נוסחה מפורשת לסדרה.

תשובה 1

א. ננסה מודל בן אבר יחיד a . אז אם היה קים $K(a,a)$, לפי טענה ראשונה היתה נובעת השלילה שלו. לכן לא יתכן $K(a,a)$. אם היה נכון $S(a)$, אז לפי תכונה 2 היה קים אבר שעבורו S לא נכונה, והאבר הזה חייב להיות a . לכן לא יתכן $S(a)$. לכן קבלנו מודל בן אבר אחד:

$$U=\{a\}, \text{ not } S(a), \text{ not } K(a,a).$$

ב. נוספה הנחה 3, האומרת (בין השאר) כי קים אבר אשר S עבורו נכונה. לכן האבר הזה חייב להיות שונה מ- a , ונסמנו b . חייב להתקיים כי $K(a,b)$ נכונה, וקבלנו מודל עבור 1-3.

$$U=\{a,b\}, S(b) \ K(b,a).$$

ג. פשוט נרשם את המודל של א.

ד. נוסף ד, אשר אומר כי לכל אבר שעבורו S לא נכון, יש יחס K המתקים עם אותו אבר במקום הראשון. ביחוד עבור האבר a חייב להתקים $K(a,--)$. לא יתכנו $K(a,a), K(a,b)$ כי הללו יסתרו את תכונה 1. לכן חייב להתקים אבר שלישי c , ונקבל תחילת מודל:

$$U = \{a, b, c\}, S(b), S(c) \quad K(b, a), K(a, c).$$

אבל לפי תכונה 2 המופעלת על האבר c נובע כי יש יחס $K(c, --)$ אל אבר שעבורו S לא מתקים. לא נוכל לבחור את a ליחס $K(c, a)$ כי אז נקבל סתירה ל- $K(a, c)$. לכן חייב להיות אבר חדש ולכן נקבל המשך בניה של המודל:

$$U = \{a, b, c, d\}, S(b), S(c) \quad K(b, a), K(a, c), K(c, d).$$

עלינו להפעיל את תכונה 4 על d , והפעם נקבל כי $K(d, a)$ לא יגרר סתירה. לכן נקבל מודל מינימלי עבור 1-4:

$$U = \{a, b, c, d\}, S(b), S(c) \quad K(b, a), K(a, c), K(c, d), K(d, b).$$

ה. פשוט נרשם את המודל של ג.

תשובה 2

כל ההנחות 1-3 מתחילות בכמת 'לכל' ובמשפט גרירה או שלילה, ולכן יש לה מודל $U = \{a\}$ שבו אף יחס K לא מתקים. במודל זה אף אחד מהטענות b, c לא מתקימת, לכן טענות אלו לא נובעות מההנחות. ולעומתה טענה a מתקימת כיון שמה שלפני החץ תמיד לא נכון ולכן a נובעת מההנחות. לכן גם יש מודל בן 3 איברים $U = \{a, b, c\}$ בלי אף יחס K . האם קיים מודל אחר, לא איזומורפי? עליו להכיל לפחות K אחד, למשל $K(a, b, c)$. לפי הנחה 1, אסור שיתקמו $K(c, a, b), K(a, c, b), K(b, c, a)$. לפי הנחה 3, צריך להתקים

$K(c,--,--)$ כלשהו. ננסה להשלים K זה בתוך המודל בן 3 האיברים. לפי הנחה 2, לא יתכנו $K(c,a,a), K(c,b,b), K(c,c,c)$ ולכן נותרו האפשרויות $K(c,b,a), K(c,a,b)$, אבל $K(c,a,b)$ נפסלה קודם.

עבור מסקנה א קל לראות כי המודל

$$U = \{a,b,c\}, K(c,b,a), K(a,b,c).$$

הוא מודל נכון ולכן התשובה הנכונה היא כן.

תשובה 3

א-תנועה ראשונה

$$d([1,2,3,4,5,6,7,8,9], A)$$

עוצרת בשורה 15

ב-תנועה שניה

$$a([1,2,3,4,5,6,7,8,9], C2, D2)$$

עוצרת בשורה 5

ג-תנועה שלישית

$a([5,6,7,8,9],V3,K3)$

עוצרת בשורה 5

ד-תנועה רביעית

$a([9],V4,K4)$

עוצרת בשורה 2

$K3=[7,8],V3=[5,6,9],C2=[1,2,5,6,9],D2=[3,4,7,8]$ מתבצעות השמות

ה-תנועה חמישית

$c([1,2,5,6,9],E5)$

עוצרת בשורה 14

ו-תנועה שישית

$c([5,6,9],W6)$

עוצרת בשורה 14

ז-תנועה שביעית

$c([9],W7)$

עוצרת בשורה 13

$W7=[9],W6=[6,5,9],E5=[2,1,6,5,9]$ מתבצעות השמות

ח-תנועה שמינית

$b([2,1,6,5,9],[3,4,7,8],Y8)$

עוצרת בשורה 11

ט-תנועה תשיעית

$b([6,5,9],[7,8],M9)$

עוצרת בשורה 11

י-תנועה עשירית

$b([9],[],M10)$

עוצרת בשורה 7

מתבצעות השמות $M10=[9],M9=[6,5,7,8,9],Y8=[2,1,3,4,6,5,7,8,9]$

יא-תנועה אחד עשר

התכנית סימה, אין תנועה

יב-תנועה שנים עשר

התכנית סימה, אין תנועה

יג-הפלט כלפי המשתמש הוא $A=[2,1,3,4,6,5,7,8,9]$

יד- התכנית לא עוצרת בשורות 1,3,4,6,8,9,10,12 כלל.

טו- התכנית עוצרת פעם אחת בשורות 2,7,13,15.

טז-התכנית עוצרת פעמים בשורות 5,11,14

תשובה 4

הקוד:

$$e([], []). \% 16$$

$$e([X], [X]). \% 17$$

$$e([X, Y], [Y, X]). \% 18$$

$$e([X, Y, Z], [Y, X, Z]). \% 19$$

$$e([X, Y, Z, U|V], [Y, X, Z, U|W]): -e(V, W). \% 20$$

מבצע את אותו אלגוריתם כמו הקוד המקורי.

תשובה נוספת (שפוץ של אחת התשובות במבחן):

$$v([], []). \% 1$$

$$v([X], [X]). \% 2$$

$$v([X, Y|Z], [Y, X|U]): -w(Z, U). \% 3$$

$$w([], []). \% 4$$

$$w([X], [X]). \% 5$$

$$w([X, Y|Z], [X, Y|U]): -v(Z, U). \% 6$$

תשובה 5

הנתון $f(n) - 9f(n-1) + 23f(n-2) - 15f(n-3) = 0$ או $f(n) = 9f(n-1) - 23f(n-2) + 15f(n-3)$

מגדיר פולינום אפיוני $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$. נחש כי יש לו פתרון שלם. אז הפתרון חיב לחלק את 15, ולכן ננסה את 1. נציב $x=1$ ונקבל פתרון, ולכן הפולינום האפיוני מתחלק ב-

$x-1$. נחלק ונקבל $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x-1)(x^2 - 8x + 15)$. נחשב את השרשים של

הפולינום הרבועי ונקבל כי $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x-1)(x-3)(x-5)$. לכן על הסדרה להיות

מהצורה $x_n = a \cdot 1^n + b \cdot 3^n + c \cdot 5^n$. נציב את תנאי ההתחלה $f(0)=1, f(1)=3, f(2)=17$,

ונקבל שלש משוואות עם שלשת הנעלמים a, b, c .

$$a+b+c=1$$

$$a+3b+5c=3$$

$$a+9b+25c=17$$

נחסר משוואות שניה משלישית וראשונה משניה ונקבל מערכת:

$$2b+4c=2$$

$$6b+20c=14$$

או

$$b+2c=1$$

$$3b+10c=7$$

נביט על המשוואה השניה פחות 3 פעמים הראשונה ונקבל $4c=4$ ולכן $c=1$, נציב ונקבל $b=-1$ ושוב נציב ונקבל $a=1$ ולכן הסדרה הרצויה היא $x_n=1-3^n+5^n$ ואכן קל לראות כי סדרה זו מקימת את כל הדרוש.

רשימת חוקי לוגיקה

$$1 \vee p \equiv 1, \quad 1 \wedge p \equiv p, \quad 0 \vee p \equiv p, \quad 0 \wedge p \equiv 0 \quad \underline{\text{חוקי 0,1 (1-4)}}$$

$$p \vee \bar{p} \equiv 1, \quad p \wedge \bar{p} \equiv 0, \quad \neg(\neg p) \equiv p \quad \underline{\text{חוקי משלים (5-7)}}$$

$$\underline{0} \equiv 1, \quad \underline{1} \equiv 0, \quad \underline{p \vee q \equiv p \wedge q} \quad \underline{p \wedge q \equiv p \vee q} \quad \underline{\text{חוקי דה-מורגן (8-11)}}$$

$$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p \quad \underline{\text{חוקי אידמפוטנטיות (12-13)}}$$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ הוקי פלוג (14-15)

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ הוקי בליעה (16-17)

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ הוקי קבוץ (18-19)

$p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ הוקי חלוף (20-21)

$[p \rightarrow q] \wedge p \rightarrow q$ (22) Modus ponens

$[p \rightarrow q] \wedge q \rightarrow p$ (23) Modus tolens

$[p \rightarrow q] \equiv [q \rightarrow p]$ (24) Contrapositia

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ (25) Transitivity

$(p \wedge q) \rightarrow p$ $(p \wedge q) \rightarrow q$ (26) פרוט

$[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow q$ cut(27)

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$ exportatia(28)

$$(p \rightarrow q) \equiv \neg p \vee q \quad \text{גרירה (29)}$$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \quad \text{שקילות (30)}$$

$$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)] \rightarrow (q \vee r) \quad \text{חזלוציה (31)}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)] \quad \text{(32)}$$

$$p \uparrow q \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \text{(33)nand}$$

$$p \downarrow q \equiv \neg p \vee \neg q \quad \text{(34)nor}$$

$$p \oplus q \equiv [(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)] \equiv [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \quad \text{(35)xor}$$

$$R(a) \vdash \exists R(x) \quad \text{(36)EG}$$

$$\exists R(x) \vdash R(a) \quad \text{בתנאי ש-} a \text{ שם עצם חדש בשפה } \text{(37)EP(x/a)}$$

$$R(x) \vdash \forall R(x) \quad \text{בתנאי ש-כל ההופעות של } x \text{ ב-} R \text{ חפשיות. } \text{(38)UG}$$

$\forall R(x) \vdash R(t)$ (39) US(x/t) באחת משתי האפשרויות הבאות:

1. t הוא קבוע כלשהו בשפה. 2. t הוא משתנה שהצבתו איננה מקלקלת הופעות חפשיות ב- R של אף משתנה.

$$\forall x(R(x)) \equiv \exists x(R(x)) \quad (40) \text{DM}$$

$$\exists x(R(x)) \equiv \forall x(R(x)) \quad (41) \text{DM}$$

$$[a \wedge (b \rightarrow c)] \rightarrow [(a \rightarrow b) \rightarrow c] \quad (42)$$