



מבחן סוף בקורס לוגיקה ותכנות לוגי.

מועד א יום ו י אב התשס"ו, 4-8-2006.

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- המבחן הוא ללא חומר עזר וללא מחשבוני, למעט דפי הנוסחאות המצורפים.
- המחברת משמשת לטיוטה בלבד ולא תבדק. התשובות שתבדקנה הן אלו שתתקבלנה על ידי הקפת האפשרות הנכונה בגוף השאלון, או על ידי כתיבת תשובה בשאלון.
- המבחן כולל 4 שאלות. על כלן יש לענות בגוף השאלון.
- שאלה ראשונה בת 5 סעיפים השוים 8 נקודות כל-אחד, סה"כ 40 נקודות ועוסקת במודלים.
- שאלה שנייה בת משקל 25 נקודות. ועוסקת בתחשיב פסוקים.
- שאלה 3 שאלת מעקב בפרולוג בת 17 סעיפים, כל אחד שווה נקודה סה"כ 17 נקודות.
- שאלה 4 כוללת כתיבת קוד פרולוג ומשקלה 20 נקודות

בהצלחה.

שאלה 1, אודות מודלים.

נתונה רשימה של פסוקים:

$$1. \exists X \exists Y \exists Z (K(X, Y, Z)).$$

$$2. \forall X \forall Y \forall Z [K(X, Y, Z) \rightarrow \{\overline{K(X, Z, Y)} \wedge \overline{K(Y, Z, X)} \wedge \overline{K(Y, X, Z)} \wedge \overline{K(Z, X, Y)} \wedge \overline{K(Z, Y, X)}\}].$$

$$3. \forall X \exists Y \exists Z (K(X, Y, Z))$$

א. כתוב כאן מודל מינימלי. המקימים את תכונות 1-3.

נביט על התכונה הבאה:

$$4. \forall X \forall Y \forall Z \forall U \forall V [\{ K(X, Y, Z) \wedge K(Y, U, V) \} \rightarrow [(U \neq X) \wedge (V \neq X)].$$

ב. כתוב כאן מודל מינימלי. המקימים את תכונות 1-4.

ג. כתוב כאן מודל מינימלי אשר מקים את תכונות 1-3 אך לא את תכונות 1-4.

נביט על התכונה הבאה:

$$5. \forall X \forall Y \forall Z \forall U \forall V [\{ K(X, Y, Z) \wedge K(Y, U, V) \} \rightarrow [(U \neq Z) \wedge (V \neq Z)].$$

ד. כתוב כאן מודל מינימלי. המקימים את תכונות 1-5.

ה. כתוב כאן מודל מינימלי אשר מקים את תכונות 1-4 אך לא את תכונות 1-5.

שאלה 2, אודות טעונים תקפים.

הבט ברשימת ההנחות הבאות:

1. $\exists X \exists Y (K(X, Y))$.

2. $\forall X \exists Y (K(X, Y) \vee K(Y, X))$.

3. $\forall X \forall Y (K(X, Y) \rightarrow \overline{K(Y, X)})$.

4. $\forall X \forall Y \forall Z [(K(X, Y) \wedge K(X, Z)) \rightarrow (Y = Z)]$.

5. $\forall X \forall Y \forall Z [(K(X, Z) \wedge K(Y, Z)) \rightarrow (X = Y)]$.

ובמסקנה:

$$\forall X \forall Y (K(X, Y) \vee K(Y, X)).$$

האם הטעון תקף? אם כן הוכח, אם לא תן מודל נגדי.

תשובה:

המשך תשובה:

שאלה 3, פרולוג.

הבט בקוד הבא

$a([X],[X]).\%1$

$a([X,Y],[X]).\%2$

$a([X,Y|Z],[X|K]):-a(Z,K).\%3$

$b([X],[]).\%4$

$b([X,Y],[Y]).\%5$

$b([X,Y|Z],[Y|K]):-b(Z,K).\%6$

$c([],[X],[X]).\%7$

$c([X],[Y],[X,Y]).\%8$

$c([X|Y],[Z|W],[X,Z|U]):-c(Y,W,U).\%9$

$d(A,B):-a(A,C),b(A,D),c(D,C,B).\%10$

ונתונה השאילתא:

$d([1,2,3,4,5,6,7,8,9],A).$

זכור כי תנועה היא פתיחת שאילתא פנימית או חיצונית אשר מבצעת חפוש לאורך הקוד ועוצרת מול שורת קוד מתאימה. לכל סעיף, כתוב את השאילתא המתאימה, ומול איזו שורת קוד היא עוצרת. באם התכנית כלה עצרה והדפיסה, הנח שתקתק הסימן ; ושהתכנית המשיכה לרוץ.

1-תנועה ראשונה.

2. תנועה שניה.

3-תנועה שלישית.

4. תנועה רביעית.

5-תנועה חמישית.

6. תנועה שישית.

7-תנועה שביעית.

8. תנועה שמינית.

9. תנועה תשיעית.

10. תנועה עשירית.

11-תנועה אחד עשר.

12. תנועה שנים עשר.

13-תנועה שלש עשר.

14. תנועה ארבע עשר.

15-תנועה חמש עשר.

16. תנועה שש עשר.

17. מהו הפלט הראשון כלפי המשתמש? אם אין כזה רשום שאין.

שאלה 4

רשם כאן קוד פרולוג בן 3 שורות אשר מבצע בדיוק את מה שמבצע הקוד הנתון בשאלה.

תשובה 1

א. לפי תכונה ראשונה נובע כי קימים שלשה איברים a, b, c כך שמתקיים $K(a, b, c)$. האם יתכן כי האברים מתלכדים? אם למשל היה מתקיים כי $a=b$ אז מתכונה 2 היתה נובעת הסתירה כיון ש-ל $K(y, x, z)$ אסור להתקיים. אם למשל $a=c$ אז היתה נוצרת סתירה כיון ש-ל $K(z, y, x)$ אסור להתקיים, ובאותה צורה לא לתכן כי $b=c$. לכן כל יחס $K(a, b, c)$ צריך להתקיים בין איברים שכלם שונים. לפי תכונה 3, צריך להתקיים $K(b, X, Y)$ עבור אילושהם Y, X . לפי תכונה 2, אסור שהקבוצה $\{X, Y\}$ תזדהה עם הקבוצה $\{a, c\}$. לכן לפחות אחד מ- X או Y צריך להיות אבר רביעי d . נניח בה"כ כי מתקיים $K(b, d, a)$. כי"ל צריך להתקיים $K(c, X, Y)$ ונניח בה"כ כי מתקיים $K(c, d, a)$. צ"ל $K(d, X, Y)$ ואפשר לרשם $K(d, c, b)$. בצורה זו קבלנו מודל של תכונות 1-3 בן ארבעה איברים וזהו מודל מינימלי. ישנם עוד מודלים בני ארבעה איברים, המתקבלים על ידי שנוי סדר האיברים, למשל במקום $K(b, d, a)$ נרשם $K(b, a, d)$, וכדומה. מודל בן 5 איברים יתכן, אם נוסיף את היחס $K(e, a, b)$ למשל.

ב. תכונה 4 דורשת כי אם y מופיע שני בשלשת K , אז כשיופיע ראשון, בשלשה אחרת לפי תכונה 3, האיברים של השלשה החדשה לא יהיו האבר הראשון מהשלשה בה הופיע שני. במודל שרשמנו למעלה תכונה זו לא מתקיימת. השלשות $(a, b, c), (b, d, a)$ למשל סותרות אותה, כיון ש- b שני בשלשה הראשונה, ראשון בשניה, והאבר a שהיה ראשון, מופיע כעת בשלשה השניה. ננסה לשנות שלשות ולקבל מודל נכון בן ארבעה איברים לתכונות 1-4. נביט במודל:
 $U = \{a, b, c, d\}, \{K(a, b, c), K(b, d, c), K(d, a, c), K(c, ?1, ?2)\}$
כל אבר שנשים במקום סימן השאלה הראשון יגרר סתירה לתכונה 4. לכן נציב במקומו אבר חדש ונשלים את המודל:

$$U = \{a, b, c, d, e\}, \{K(a, b, c), K(b, d, c), K(d, a, c), K(c, e, b), K(e, a, d)\}.$$

ג. פשוט נרשם את המודל של א.

ד. קל לראות כי המודל הבא הוא של 1-5

$$U = \{a, b, c, d, e\}, \{K(a, b, c), K(b, e, d), K(e, c, a), K(c, b, d), K(d, a, e)\}.$$

ה. פשוט נרשם את המודל של ג.

תשובה 2

נביט בהנחות ונוסיף להן את שלילת המסקנה ונקבל את ההנחות החדשות,

1. $\exists X \exists Y (K(X, Y))$.
2. $\forall X \exists Y (K(X, Y) \vee K(Y, X))$.
3. $\forall X \forall Y \forall Z (K(X, Y) \rightarrow \overline{K(Y, X)})$.
4. $\forall X \forall Y \forall Z [(K(X, Y) \wedge K(X, Z)) \rightarrow (Y = Z)]$.
5. $\forall X \forall Y \forall Z [(K(X, Z) \wedge K(Y, Z)) \rightarrow (Y = Z)]$.
6. $\exists X \exists Y (\overline{K(X, Y)} \wedge \overline{K(Y, X)})$.

מהן צריך להגיע לסתירה או למודל. לפי הנחה ראשונה קים זוג כן ש- $K(a, b)$. לפי הנחה אחרונה קים זוג שעבורו אין יחס. בואו נניח כי נמצא מודל פרטי למערכת החדשה, ולכן נרשה לאחד האיברים להיות a. אז לא מתקים $K(a, c)$ וגם לא $K(c, a)$. לכן, לפי תכונה 2 צריך להתיחס לאבר, ונניח בה"כ כי מתקים $K(c, d)$. טוענים שזהו מודל עבור 1-4.

$$U = \{a, b, c, d\}, \{K(a, b), K(c, d)\}$$

דרישות 1, 2, 6 מתקיימות לפי הבניה, ולכן נותר לראות כי אקסיומות 3, 4, 5 מתקיימות.

תשובה 3

תנועה ראשונה

$d([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], A)$

עוצרת בשורה 10

תנועה שניה

$a([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], C)$

עוצרת בשורה 3

תנועה שלישית

$a([3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], C)$

עוצרת בשורה 3

תנועה רביעית

$a([5, 6, 7, 8, 9], C)$

עוצרת בשורה 3

תנועה חמישית

$a([7, 8, 9], C)$

עוצרת בשורה 3

תנועה חמישית

$a([9], C)$

עוצרת בשורה 1

תנועה ששית

$b([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], D)$

עוצרת בשורה 6

תנועה שביעית

$b([3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], D)$

עוצרת בשורה 6

תנועה שמינית

$b([5, 6, 7, 8, 9], D)$

עוצרת בשורה 6

תנועה תשיעית

$b([7, 8, 9], D)$

עוצרת בשורה 6

תנועה עשירית

$b([9], D)$

עוצרת בשורה 4

תנועה אחד עשר

$c([2, 4, 6, 8], [1, 3, 5, 7, 9], B)$

עוצרת בשורה 9

תנועה שנים עשר

$c([4, 6, 8], [3, 5, 7, 9], B)$

עוצרת בשורה 9

תנועה שלש עשר

$c([6, 8], [5, 7, 9], B)$

עוצרת בשורה 9

תנועה ארבע עשר

$c([8], [7, 9], B)$

עוצרת בשורה 9

תנועה חמש עשר

$c([], [9], B)$

עוצרת בשורה 7

התכנית מדפיסה תשובה $A=[2,1,4,3,6,5,8,7,9]$. ועוצרת. מתקתקים את הסימן ; .

$c([], [9], B)$

ממשיכה לרוץ משורה 8 ולא מצליחה לעצור עד סוף התכנית.

סעיף אחרון:

הקוד:

$e([], [])$.

$e([X], [X])$.

$e([X, Y|Z], [Y, X|W]) :- e(Z, W)$.

מבצע את אותו אלגוריתם כמו הקוד המקורי.

רשימת חוקי לוגיקה

$1 \vee p \equiv 1, 1 \wedge p \equiv p, 0 \vee p \equiv p, 0 \wedge p \equiv 0$ חוקי (1-4)

$p \vee \neg p \equiv 1, p \wedge \neg p \equiv 0, \neg(\neg p) \equiv p$ חוקי משלים (5-7)

$0 \equiv 0, 1 \equiv 1, p \vee q \equiv p \vee q, p \wedge q \equiv p \wedge q$ חוקי דה-מורגן (8-11)

$p \vee p \equiv p, p \wedge p \equiv p$ חוקי אידמפוטנטיות (12-13)

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ חוקי פלוג (14-15)

$p \vee (p \wedge q) \equiv p, p \wedge (p \vee q) \equiv p$ חוקי בליעה (16-17)

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad \text{הוקי קבוץ (18-19)}$$

$$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p \quad \text{הוקי חלוף (20-21)}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge p \rightarrow q \quad (22) \text{Modus ponens}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge q \rightarrow p \quad (23) \text{Modus tolens}$$

$$[p \rightarrow q] \equiv [q \rightarrow p] \quad (24) \text{Contrapositia}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \quad (25) \text{Transitivity}$$

$$(p \wedge q) \rightarrow p \quad (p \wedge q) \rightarrow q \quad (26) \text{פרוט}$$

$$[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow q \quad \text{cut(27)}$$

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad \text{exportatia(28)}$$

$$(p \rightarrow q) \equiv p \vee q \quad (29) \text{גרירה}$$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge q)] \quad (30) \text{שקילות}$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee r) \quad (31) \text{זולוציה}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)] \quad (32)$$

$$p \uparrow q \equiv p \wedge q \quad (33) \text{nand}$$

$$p \downarrow q \equiv p \vee q \quad (34) \text{nor}$$

$$p \oplus q \equiv [(p \vee q) \wedge (p \wedge q)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)] \quad (35) \text{xor}$$

$$R(a) \vdash \exists R(x) \quad (36) \text{EG}$$

$$\exists R(x) \vdash R(a) \quad (37) \text{EP}(x/a) \text{ בתנאי ש-} a \text{ שם עצם חדש בשפה}$$

$$R(x) \vdash \forall R(x) \quad (38) \text{UG} \text{ בתנאי ש-כל ההופעות של } x \text{ ב-} R \text{ חפשיות.}$$

$$\forall R(x) \vdash R(t) \quad (39) \text{US}(x/t) \text{ באחת משתי האפשרויות הבאות:}$$

1. t הוא קבוע כלשהו בשפה. 2. t הוא משתנה שהצבתו איננה מקלקלת הופעות חפשיות ב-R של אף משתנה.

$$\forall x(R(x)) \equiv \exists x(R(x)) \quad (40) \text{DM}$$

$$\underline{\exists x(R(x)) \equiv \forall x(R(x))} \quad (41)DM$$

$$[a \wedge (b \rightarrow c)] \rightarrow [(a \rightarrow b) \rightarrow c] \quad (42)$$