שעור ההשלמה יתקים אי"ה ביום ב, יז אדר ב ה;תשסה 28-3-2005 בשעה 17

השלמה 2 לשעור לוגיקה

תרגילים נוספים של סמי, HW4 תרגיל 3, סעיפים ט,י.

בכל מערכת יש לבדוק אם היא כן או לא ספיקה, כלומר אם יש לה מודל, או שנובעת ממנה סתירה.

ט.

$\exists x[\underline{Rxx}]$, $\forall x\forall y\forall z[(Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz]$, $\forall x\forall y[Rxy\rightarrow Ryx]$

י.

$\exists x\exists y[\underline{Hxy}\wedge Fx]$, $\forall x[Fx\rightarrow Gx]$, $\forall x\forall y[(Fx\wedge Gy)\rightarrow Hxy]$

תשובות

סעיף ט.

1. $\exists x[\underline{Rxx}]$.
2. $\forall x\forall y\forall z[(Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz]$.
3. $\forall x\forall y\ [Rxy\rightarrow Ryx]$.
4. $\underline{Raa}$, 1,EP(x/a).

בשלב זה גמרנו להסיק את כל המסקנות כי מטענה 2 ע"י US נקבל כמסקנה את מסקנת טענה 1, וכנ"ל מ-3 .

לכן ננסה מודל: $U=\{a\},R=\varnothing$. אקסיומה 1 מתקימת עבור x=a ואקסיומות 2,3 מתקימות כ-$0\rightarrow 0$, משום שכל x שנציב (x=a)נקבל כי R הוא שקרי. המודל עובד. המערכת ספיקה.

המשך התרגיל (מעבר למה שסמי בקש) .

נוכיח כי בכל מודל עבור השפה, הפסוק הבא נכון.

$\forall x[\underline{Rax}]$.

הוכחה: נוכיח בדרך השלילה על ידי זה שנוסיף את שלילת הטענה כהנחה להנחות האחרות.

1. $\exists x[\underline{Rxx}]$.
2. $\forall x\forall y\forall z[(Rxy\wedge Ryz)\rightarrow Rxz]$.
3. $\forall x\forall y\ [Rxy\rightarrow Ryx]$.
4. $\underline{Raa}$, 1,EP(X/a).
4. $\exists x[Rax]$.
5. Rab, 4,EP(X/b).
6. $Rab\rightarrow Rba$, 3,US(X/a,Y=b).
7. Rba, 4,5,MP.
8. $Rab\wedge Rba$
9. $Rab\wedge Rba\rightarrow Raa$, 2,US(X/a,Y/b,Z/a).
10. Raa, 8,9,MP.
11. $Raa\wedge\underline{Raa}$

המשך אחר של התרגיל (שוב מעבר למה שכתוב).

הוכח כי בשפה שמגדירות האקסיומות

1. $\forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz]$.
2. $\forall x \forall y\ [Rxy \rightarrow Ryx]$.

תמיד (=בכל מודל) מתקיים הפסוק:

$\forall x[\underline{Rxx} \rightarrow \forall y(\underline{Rxy})]$.

הוכחה: נוכיח כי אם נוסיף את שלילת המסקנה, אז נקבל סתירה. נזכר כי השלילה של $p \rightarrow q$ היא $p=1, q=0$ וכי הפוך של לכל הוא קים, ולכן שלילת המסקנה היא:

3.$\exists x[\underline{Rxx} \wedge \exists y(Rxy)]$.

ולכן נמשיך:

4. $\underline{Raa} \wedge Rab$

ולכן אנו עוברים למצב של התרגיל הקודם.

סעיף י.

1. $\exists x \exists y[\underline{Hxy} \wedge Fx]$.
2. $\forall x[Fx \rightarrow Gx]$.
3. $\forall x \forall y[(Fx \wedge Gy) \rightarrow Hxy]$.

ולכן נמשיך:

4. $\underline{Hab}\wedge Fa$, 1,EP(X/a,Y/b).
5. Fa, 4, perut.
6. $\underline{Hab}$, 4, perut.
7. $Fa\rightarrow Ga$, 2, US(X/a).
8. Ga, 5,7,MP.
9. $(Fa\wedge Gb)\rightarrow Hab$, 3,US(X/a,Y/b).
10. $\underline{(Fa\wedge Gb)}$, 6,9,MT.
11. $\underline{Fa}\vee\underline{Gb}$, 10,DM.
12. $Fa\rightarrow\underline{\ Gb}$, 11, Ax(28?).
13. $\underline{\ Gb}$,7,12,MP.
14. $Fb\rightarrow Gb$, 2, US(X/b).
15. $\underline{Fb}$, 13,14,MT.
16, $Fa\wedge Ga$ 5,8.
17. $(Fa\wedge Ga)\rightarrow Haa$, 3,US(X,Y/a).
18. Haa, 16,17,MP.

לא רואים שום מסקנה נוספת. ננסה מודל. U={a,b},F={a}, G={a}, ורק יודעים כי H לא מכיל את הזוג(a,b) וכן מכיל את הזוג (a,a) . לא ידוע דבר אורות הזוגות (b,a),(b,b) . לכן אפשר לנסות מודלים בני שני איברים שבהם הזוגות בשאלה הם כן או לא במודל. לכן כרגע מבחינת היחס H יש ארבע אפשרויות.

ננסה את המודל הרזה ביותר: F=G={a}, H={(a,a)}.

אקסיומה 1 מתקיימת עם x=a,y=b .

אקסיומה 2 התקיימת, כל אבר המקים את F גם מקים את G .

אקסיומה 3 מתקימת: האפשרות היחידה, במודל הרזה, שבו לפני החץ יש T היא כאשר x=y=a, ובמקרה זה, במודל הרזה, ובכל אחת מארבעת האפשרויות, אקסיומה 3 מתקימת.

לסכום יש 4 מודלים עם עולם בן שני איברים:

U={a,b},F=G={a}, H={(a,a)}.

U={a,b},F=G={a}, H={(a,a),(b,a)}.

U={a,b},F=G={a}, H={(a,a),(b,b)}.

U={a,b},F=G={a}, H={(a,a),(b,a),(b,b)}.

המשך סעיף י.

האם יתכן לשפה זו מודל בן אבר יחיד? נזכר כי דרשנו שני איברים כדי לנסות להגיע לסתירה.

1. ∃x∃y[<u>Hxy</u>∧Fx].
2. ∀x[Fx→Gx].
3. ∀x∀y[(Fx∧Gy)→Hxy].

ולכן נמשיך:

4. <u>Haa</u>∧Fa, 1,EP(X,Y/a).
5. Fa, 4, perut.
6. <u>Haa</u>, 4, perut.
7. Fa→Ga, 2, US(X/a).
8. Ga, 5,7,MP.
9. Fa∧Ga, 5,8.

10. $(Fa \wedge Ga) \rightarrow Haa$, 3,US(X,Y/a).

11. Haa, 9,10,MP.

12. $\underline{Haa} \wedge Haa$, 6,11.

ולכן אין לשפה מודל בן אבר אחד.