

רשימת חוקי לוגיקה

$$1 \vee p \equiv 1, 1 \wedge p \equiv p, 0 \vee p \equiv p, 0 \wedge p \equiv 0 \quad \underline{0,1 \text{ חוקי (1-4)}}$$

$$p \vee \bar{p} \equiv 1, p \wedge \bar{p} \equiv 0, \neg(\bar{p}) \equiv p \quad \underline{\text{חוקי משלים (5-7)}}$$

$$\underline{0} \equiv 1, \underline{1} \equiv 0, \underline{p \vee q} \equiv \underline{p \wedge q} \quad \underline{p \wedge q} \equiv \underline{p \vee q} \quad \underline{\text{חוקי דה-מורגן (8-11)}}$$

$$p \vee p \equiv p, p \wedge p \equiv p \quad \underline{\text{חוקי אידמפוטנטיות (12-13)}}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \underline{\text{חוקי פלוג (14-15)}}$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p, p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad \underline{\text{חוקי בליעה (16-17)}}$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad \underline{\text{חוקי קבוץ (18-19)}}$$

$$p \vee q \equiv q \vee p, p \wedge q \equiv q \wedge p \quad \underline{\text{חוקי חלוף (20-21)}}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge p \rightarrow q \quad \underline{(22) \text{Modus ponens}}$$

$$[p \rightarrow q] \wedge q \rightarrow p \quad \underline{(23) \text{Modus tolens}}$$

$$[p \rightarrow q] \equiv [q \rightarrow p] \quad \underline{(24) \text{Contrapositia}}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \quad \underline{(25) \text{Transitivity}}$$

$$(p \wedge q) \rightarrow p \quad (p \wedge q) \rightarrow q \quad \text{פרוט(26)}$$

$$[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow q \quad \text{cut(27)}$$

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad \text{exportatia(28)}$$

$$(p \rightarrow q) \equiv p \vee q \quad \text{גרירה(29)}$$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge q)] \quad \text{שקילות(30)}$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee r) \quad \text{רזולוציה(31)}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)] \quad \text{(32)}$$

$$p \uparrow q \equiv p \wedge q \quad \text{(33)nand}$$

$$p \downarrow q \equiv p \vee q \quad \text{(34)nor}$$

$$p \oplus q \equiv [(p \vee q) \wedge (p \wedge q)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge q)] \quad \text{(35)xor}$$

$$R(a) \vdash \exists R(x) \quad \text{(36)EG}$$

$\exists R(x) \vdash R(a)$  (37)EP(x/a) בתנאי ש-a שם עצם חדש בשפה

$R(x) \vdash \forall R(x)$  (38)UG בתנאי ש-כל ההופעות של x ב-R חפשיות.

$\forall R(x) \vdash R(t)$  (39)US(x/t) באחת משתי האפשרויות הבאות:  
1. t הוא קבוע כלשהו בשפה. 2. t הוא משתנה שהצבתו איננה מקלקלת הופעות חפשיות ב-R של אף משתנה.

$\forall x(R(x)) \equiv \exists x(R(x))$  (40)DM

$\exists x(R(x)) \equiv \forall x(R(x))$  (41)DM

$[a \wedge (b \rightarrow c)] \rightarrow [(a \rightarrow b) \rightarrow c]$  (42)

יום ו' כז ניסן התשסה, 6-5-2005 .

מבחן אמצע בקורס לוגיקה ותכנות לוגי. מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.

משך המבחן שעתים וחצי. המבחן הוא ללא חומר עזר, למעט דפי הנוסחאות המצורפים. המחברת משמשת לטייטה בלבד ולא תבדק. התשובות שתבדקנה הן אלו שתתקבלנה על ידי הקפת האפשרות הנכונה בגוף השאלון. נסה לא לעכב אותנו בשאלות שאיננו יכולים לענות אודותן, ולא להתלונן אחרי המבחן כי בגלל איזושהי תשובה שקבלת מהמורה/מתרגל, הקפת אפשרות לא נכונה בשאלון. המבחן כולל 3 שאלות בנות 38 סעיפים סה"כ. כל סעיף הוא בעל ערך של 3 נקודות. ציון מקסימלי אפשרי: 114/114 .

בהצלחה.

## שאלה 1

הבט ברשימת הפסוקים הבאה, והוכח במחברתך כל מסקנה שתוכל להסיק מהם.

$$1. \forall X \forall Y [O(X, Y) \rightarrow \overline{O(Y, X)}].$$

$$2. \exists X \exists Y [O(X, Y)].$$

השאלות הבאות מתיחסות לשפה של 1-2. ענה על הסעיפים הבאים על ידי הקפת האפשרות הנכונה.

א. קים מודל לשפה זו. נכון-לא נכון.

ב. קים לשפה זו מודל בן אבר אחד. נכון-לא נכון.

ג. בכל מודל של השפה ישנם לפחות שני קבועים שונים (נניח  $a, b$ ) כך שנובע  $O(a, b)$  נכון-לא נכון.

ד. בכל מודל של השפה קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(a, c)$  נכון-לא נכון.

ה. בכל מודל של השפה קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(b, c)$  נכון-לא נכון.

ו. קים מודל אחד לפחות של השפה שבו קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(a, c)$  נכון-לא נכון.

נוסיף לשפה את הדרישה הבאה.

$$3. \forall X \exists Y [O(X, Y)].$$

השאלות הבאות מתיחסות לשפה של 1-3 .

ז . קים מודל לשפה זו. נכון-לא נכון.

ח . קים לשפה זו מודל בן אבר אחד. נכון-לא נכון.

ט . בכל מודל של השפה ישנם לפחות שני קבועים שונים (נניח  $a, b$ ) כך שנובע  $O(a, b)$  נכון-לא נכון.

י . בכל מודל של השפה קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(a, c)$  נכון-לא נכון.

יא . קים מודל אחד לפחות של השפה שבו קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(a, c)$  נכון-לא נכון.

יב . בכל מודל של השפה קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(b, c)$  נכון-לא נכון.

יג. המודל הקטן ביותר לשפה 1-2 , שאיננו מודל לשפה 1-3 , מספר איבריו הוא: 0-אפס(אין כזה מודל), א-אחד, ב-שנים, ג-שלשה, ד-יותר משלשה.

נוסיף לשפה את הדרישה הבאה.

$$4. \forall X \exists Y [O(Y, X)].$$

השאלות הבאות מתיחסות לשפה של 1-4 .

יד . קים מודל לשפה זו. נכון-לא נכון.

טו . קים לשפה זו מודל בן אבר אחד. נכון-לא נכון.

טז . בכל מודל של השפה ישנם לפחות שני קבועים שונים (נניח a, b) כך שנובע  $O(a, b)$  נכון-לא נכון.

יז . בכל מודל של השפה קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח a, b, c) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(a, c)$  נכון-לא נכון.

יח . קים מודל אחד לפחות של השפה שבו קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח a, b, c) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(a, c)$  נכון-לא נכון.

יט . בכל מודל של השפה קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח a, b, c) כך שנובע  $O(a, b) \wedge O(b, c)$  נכון-לא נכון.

כ . המודל הקטן ביותר לשפה 1-3 , שאיננו מודל לשפה 1-4 , מספר איבריו הוא: 0-אפס (אין כזה מודל), א-אחד, ב-שנים, ג-שלשה, ד-ארבעה. ה-יותר מארבעה.

נוסיף לשפה את הדרישות הבאות.

$$5. \forall X \forall Y \{ K(X, Y) \leftrightarrow [O(X, Y) \vee [\exists Z, O(X, Z) \wedge K(Z, Y)]] \}.$$

$$6. \exists X \exists Y [\overline{K(X, Y)} \wedge \overline{K(Y, X)}].$$

השאלות הבאות מתיחסות לשפה של 1-6 .

כא . קים מודל לשפה זו . נכון-לא נכון.

כב . קים לשפה זו מודל בן שלשה אחדים . נכון-לא נכון.

כג . בכל מודל של השפה ישנם לפחות שני קבועים שונים (נניח  $a, b$ ) כך שנובע  $O(a,b)$  נכון-לא נכון.

כד . בכל מודל של השפה קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a,b) \wedge O(a,c)$  נכון-לא נכון.

כה . קים מודל אחד לפחות של השפה שבו קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a,b) \wedge O(a,c)$  נכון-לא נכון.

כו . בכל מודל של השפה קימים לפחות שלשה קבועים שונים (נניח  $a, b, c$ ) כך שנובע  $O(a,b) \wedge O(b,c)$  נכון-לא נכון.

כז . המודל הקטן ביותר לשפה 1-4 , שאיננו מודל לשפה 1-6 , מספר איבריו הוא: 0-אפס (אין כזה מודל), א-אחד, ב-שנים, ג-שלשה, ד-ארבעה. ה-יותר מארבעה.

תשובה לשאלה 1

נביט באקסיומה 2. נובע כי יש שני איברים  $a, b$  כך ש  $O(a,b)$  . נציב  $X=a, Y=b$  ונקבל כי  $O(a,b)$  . האם  $O(a,a)$  ? אם נציב  $X=Y=a$  נקבל כי  $O(a,a) \rightarrow O(a,a)$  ולכן נובע  $O(a,a)$  , וכן גם נובע  $O(b,b)$  . לכן קבלנו מודל אפשרי.



$$U=\{a,b\}, O=\{(a,b)\}.$$

ובדיקה מהירה מראה כי זהו אכן מודל כדרוש. כמו כן רואים כי מודל בן אבר אחד לא יתכן, כיון שנקבל שוב  $O(a,a) \rightarrow O(a,a)$  לפי אקסיומה 1 ומצד שני לפי אקסיומה 2 נובע  $O(a,a)$ . לכן המודל המינימלי הוא בן שני איברים ונקבל תשובות א-כן, ב-לא. ג נכון כי לא יתכן מודל בן אבר אחד, ולפי אקסיומה שניה, היחס מתקים. ד, ה לא נכונים, כיון שיש לשפה מודל בן שני איברים. עבור סעיף ו ננסה מודל בן שלשה איברים.

$$U=\{a,b,c\}, O=\{(a,b),(a,c)\}.$$

וקל לראות כי זהו מודל של השפה ולכן התשובה היא ו-כן. לכן נסכם עד כאן: א-כן, ב-לא, ג-כן, ד-לא, ה-לא, ו-כן.

לאחר שהוספנו את האקסיומה השלישית, נופל המודל בן שני האיברים, כיון שלא מתקיימת האקסיומה השלישית עבור  $X=b$ . לכן נקבל ה-לא. ננסה להרחיב את המודל בן שני האיברים על ידי זה שנוסיף את  $O(b,a)$ . כפי שראינו, מקבלים סתירה. לכן מוכרחים אבר חדש  $c$  כך שמתקים  $O(b,c)$ . שוב נפעיל את אקסיומה 3 על  $X=c$ . אסור להציב  $y=b$  כי נקבל סתירה כמקודם. ננסה להציב  $y=a$  ונקבל את המודל:

$$U=\{a,b,c\}, O=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}.$$

נקבל שאכן זהו מודל לשפה 1-3.

ולכן נקבל כי התשובות הן ז-כן, ח-לא, ט-כן (בגלל אקסיומה 2 ובגלל שאין מודל בן אבר אחד), י-לא (כיון שבמודל בן שלשת האיברים טענה זו לא מתקיימת). נקבל כי יא-כן. כדי להבין זאת נבנה את המודל הבא שבו יא יהיה נכון נביט ב-  
 $U=\{a,b,c,d,e\}, O=\{(a,b),(a,c),(b,d),(c,e),(d,a),(e,a)\}.$

נקבל כי יב-כן, לפי האקסיומות. וברור כי יג-2,

סכום עד כאן:

א-כן, ב-לא, ג-כן, ד-לא, ה-לא, ו-כן, ז-כן, ח-לא, ט-כן, י-לא, יא-כן, יב-כן, יג-ב.

נוסיף את אקסיומה 4. המודלים שמעלינו בני שלשה וחמישה איברים מקימים את האקסיומה הזו, ולכן יד-כן, טו-לא, טז-כן, יז-לא, יח-כן, יט-כן. כדי לבנות מודל שאיננו מקים את אקסיומה 4, נביט על המודל הבא:

$$U=\{a,b,c,d\}, O=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,b)\}.$$

ואז  $X=a$  לא מקים את אקסיומה 4.

סכום עד כאן:

א-כן, ב-לא, ג-כן, ד-לא, ה-לא, ו-כן, ז-כן, ח-לא, ט-כן, י-לא, יא-כן, יב-כן, יג-ב.  
יד-כן, טו-לא, טז-כן, יז-לא, יח-כן, יט-כן, כ-ד.

נוסיף את אקסיומה 5. היא אומרת כי היחס  $K$  הוא הסגור הטרנזיטיבי של היחס  $O$ . אקסיומה 6 אומרת שישנם שני איברים שאינם נמצאים זה בסגור הטרנזיטיבי של זה.

לכן כל המודלים שהיו לנו עד עתה לא מקימים את ההנחה, כי בהם כל איבר  $Y$  היה בסגור הטרנזיטיבי של כל אבר  $X$ . לכן כדי למצא מודל לשפה

החדשה, נביט על עותק כפול של המודל בן שלשה איברים, ונקבל:

$U = \{a, b, c, k, l, m\}$ ,  $O = \{(a, b), (b, c), (c, a), (k, l), (l, m), (m, k)\}$ ,  $K = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (k, k), (k, l), (k, m), (l, k), (l, l), (l, m), (m, k), (m, l), (m, m)\}$ .

וזהו אכן מודל המקיים את אקסיומות 1-6. לכן נקבל כא-כן, כב-לא, כג-כן, כד-לא (כיון שאיננו מתקיים במודל האחרון בן 6 איברים), כה-כן (פשוט נקח שני עתקים של המודל בן 5 האיברים), כו-כן וכז-ג. ולסכום נקבל:

א-כן, ב-לא, ג-כן, ד-לא, ה-לא, ו-כן, ז-כן, ח-לא, ט-כן, י-לא, יא-כן, יב-כן, יג-ב.  
יד-כן, טו-לא, טז-כן, יז-לא, יח-כן, יט-כן, כ-ד, כא-כן, כב-לא, כג-כן, כד-לא, כה-כן, כו-כן וכז-ג.

חלוקה לטורים:

טור א: א, ג, ה, ח, י, יב, יג, יד, טז, יח, כ, כב, כד, כו, כז. תשובות:

א-כן, ג-כן, ה-לא, ח-לא, י-לא, יב-כן, יג-ב, יד-כן, טז-כן, יח-כן, כ-ד, כב-לא, כד-לא, כו-כן, כז-ג.

סכום טור א:

כן, לא, לא, לא, כן, ב, כן, כן, כן, ד, לא, לא, כן, ג.

טור ב: ב, ד, ו, ז, ט, יא, יג, טו, יז, יט, כ, כא, כג, כה, כז.

ב-לא, ד-לא, ו-כן, ז-כן, ט-כן, יא-כן, יג-ב, טו-לא, יז-לא, יט-כן, כ-ד, כא-כן, כג-כן, כה-כן, כז-ג.

סכום טור ב:

לא, לא, כן, כן, כן, ב, לא, לא, כן, ד, כן, כן, כן, ג.

שאלה 2

הבט ברשימת הפסוקים הבאה, והוכח במחברתך כל מסקנה שתוכל להסיק מהם.

$$1. \exists X \forall Y \forall Z [L(Y, Z) \rightarrow (Y = X)].$$

$$2. \exists X \exists Y \exists Z [M(X, Y, Z) \wedge L(X, Y) \wedge L(X, Z)].$$

$$3. \forall X \forall Y \forall Z [M(X, Y, Z) \rightarrow \overline{(M(X, Z, Y) \wedge M(Z, Y, X) \wedge M(Y, X, Z))}].$$

השאלות הבאות מתיחסות לשפה של 1-3. ענה על הסעיפים הבאים על ידי הקפת האפשרות הנכונה.

א. קים לשפה מודל. נכון-לא נכון.

ב. קים לשפה מודל בן שלשה איברים. נכון-לא נכון.

ג. הפסוק  $\square X \forall Y [L(X, Y)]$  נכון בכל מודל של השפה. נכון-לא נכון.

ד. הפסוק  $\forall X \forall Y \forall Z [M(X, Y, Z) \square L(X, Y)]$  נכון בכל מודל של השפה. נכון-לא נכון.

ה. בכל מודל של השפה קימים שלשה איברים שונים נניח  $a, b, c$  כך ש-  
 $L(a, b) \wedge L(b, c)$ . נכון-לא נכון.

ו. בכל מודל של השפה קימים שלשה איברים שונים נניח  $a, b, c$  כך ש-  
 $L(a, b) \wedge L(c, b)$ . נכון-לא נכון.

ז. המודל המינימלי לשפה מספר איבריו הוא: 0-אפס, א-אחד, ב-שנים, ג-שלושה, ד-ארבעה, ה-חמשה, ו-יותר מחמישה.

נוסיף לשפה הקודמת את האקסיומות הבאות:

$$4. \exists X \exists Y \exists Z [M(X, Y, Z) \wedge [\forall W (\overline{L(W, Y)} \wedge \overline{L(W, Z)})]].$$

$$5. \forall X \forall Y \forall Z \forall U \forall V \forall W$$

$$[(M(X, Y, Z) \wedge M(U, V, W) \wedge (X = U) \rightarrow (Y = V)(Z = W)].$$

השאלות הבאות מתייחסות לשפה 1-5 .

ח. קים לשפה מודל. נכון-לא נכון.

ט. קים לשפה מודל בן חמשה איברים. נכון-לא נכון.

י. הפסוק  $\square X \forall Y [L(X, Y)]$  נכון בכל מודל של השפה. נכון-לא נכון.

יא. הפסוק  $\forall X \forall Y \forall Z [M(X, Y, Z) \square L(X, Y)]$  נכון בכל מודל של השפה. נכון-לא נכון.

יב. בכל מודל של השפה קימים שלשה איברים שונים נניח a,b,c כך ש-  
 $L(a,b) \wedge L(b,c)$ . נכון-לא נכון.

יג. בכל מודל של השפה קימים שלשה איברים שונים נניח a,b,c כך ש-  
 $L(a,b) \wedge L(c,b)$ . נכון-לא נכון.

יד. המודל המינימלי לשפה מספר איבריו הוא: 0-אפס, א-אחד, ב-שנים, ג-שלשה, ד-ארבעה, ה-חמשה, ו-יותר מחמישה.

נוסיף לשפה הקודמת את האקסיומה הבאה

$$6. \forall X \forall Y \forall Z \forall W [L(X, Y) \rightarrow \overline{M(Y, Z, W)}].$$

השאלות הבאות מתיחסות לשפה 1-6.

טו. קים לשפה מודל. נכון-לא נכון.

טז. קים לשפה מודל בן חמשה איברים. נכון-לא נכון.

יז. הפסוק  $\square X \forall Y [L(X, Y)]$  נכון בכל מודל של השפה. נכון-לא נכון.

יח. הפסוק  $\forall X \forall Y \forall Z [M(X, Y, Z) \square L(X, Y)]$  נכון בכל מודל של השפה. נכון-לא נכון.

יט. בכל מודל של השפה קימים שלשה איברים שונים נניח a,b,c כך ש-  
 $L(a,b) \wedge L(b,c)$ . נכון-לא נכון.

כ. בכל מודל של השפה קימים שלשה איברים שונים נניח a,b,c כך ש-  
 $L(a,b) \wedge L(c,b)$ . נכון-לא נכון.

כא. המודל המינימלי לשפה מספר איבריו הוא: 0-אפס, א-אחד, ב-שנים, ג-שלשה, ד-ארבעה, ה-חמשה, ו-יותר מחמישה.

נוסיף לשפה הקודמת את האקסיומה הבאה:

$$7. \forall X \forall Y \forall Z \forall W [M(X, Y, Z) \rightarrow \overline{L(Y, W)}].$$

השאלות הבאות מתיחסות לשפה 1-7 .

כב . קים לשפה מודל . נכון-לא נכון.

כג . קים לשפה מודל בן חמשה איברים . נכון-לא נכון.

כד . הפסוק  $\exists X \forall Y [L(X, Y)]$  נכון בכל מודל של השפה . נכון-לא נכון.

כה . הפסוק  $\forall X \forall Y \forall Z [M(X, Y, Z) \rightarrow L(X, Y)]$  נכון בכל מודל של השפה . נכון-לא נכון.

כו . בכל מודל של השפה קימים שלשה איברים שונים נניח a,b,c כך ש-  
 $L(a,b) \wedge L(b,c)$  . נכון-לא נכון.

כז . בכל מודל של השפה קימים שלשה איברים שונים נניח a,b,c כך ש-  
 $L(a,b) \wedge L(c,b)$  . נכון-לא נכון.

כח . המודל המינימלי לשפה מספר איבריו הוא: 0-אפס, א-אחד, ב-שנים, ג-שלשה, ד-ארבעה, ה-חמשה, ו-יותר מחמישה.

תשובה לשאלה 2

נתחיל עם אקסיומה 2. לפיה צריכים להיות 3 איברים כנ"ל. נבדק את המודל הכללי ביותר, כלומר שבו שלשת הקבועים שונים. לכן יש שלשה איברים שונים נניח  $a, b, c$  כך שנובע כי  $M(a, b, c) \wedge L(a, b) \wedge L(a, c)$ .

ננסה לבדק מודלים יותר קטנים. האם יתכן כי  $a=b$ ? נביט על אקסיומה 3. נציב  $X=a, Y=b, Z=c$  ונקבל כי מצד אחד  $M(a, a, c)$  נתון לפי אקסיומה 2, ומצד שני  $M(a, a, c)$  לא נכון לפי 4. לכן לא יתכן כי  $a=b$ . באותה צורה לא יתכנו השוויונים  $a=c, b=c$ . לכן שלשת האיברים באקסיומה 2 חייבים להיות שונים זה מזה.

נביט באקסיומה 1. נציב  $X=d$  ונקבל כי  $\square Y \square Z [L(Y, Z) \rightarrow (Y=d)]$ . כעת נציב  $Y=a, Z=b$  ונקבל כי  $d=a$ . לכן נקבל כי  $\square Y \square Z [L(Y, Z) \rightarrow (Y=a)]$ . כלומר היחס  $L$  קבוע במשתנה הראשון שלו.

התייחסנו לכל האקסיומות. לכן מצאנו מודל שכזה:

$$U = \{a, b, c\}, L = \{(a, b), (a, c)\}, M = \{(a, b, c)\}.$$

כעת נענה על השאלות. א-כן כי יש מודל, ב-כן כי יש מודל בן שלשה איברים, ג-לא כי אפילו  $a$  לא מקים את  $L(a, a)$ . ה, לא מתקיימים במודל בן שלשת האיברים. כדי להראות כי ד לא נכון, נמצא מודל נגדי בו ד לא נכון. נביט על המודל הבא:

$$U = \{a, b, c\}, L = \{(a, b), (a, c)\}, M = \{(a, b, c), (b, c, a)\}.$$

הוא מקים את כל האקסיומות, אבל לא את ד, כי לא מתקיים  $L(b, c)$ .

לכן נסכם: א-כן, ב-כן, ג-לא, ד-לא, ה-לא, ו-לא, ז-ג.

נוסיף את אקסיומות 4-5.

נביט באקסיומה 4. קימים 3 קבועים  $d, e, f$  כך ש- $M(d, e, f)$ . האם יתכן מצב שחלק מהקבועים מזדהה עם  $a, b, c$ ? לפי אקסיומה 4, המשפט  $L(W, e)$  אינו נכון, לכל  $W$ . לכן  $e \sqsubseteq b, e \sqsubseteq c, f \sqsubseteq b, f \sqsubseteq c$ . אין מניעה מ- $e$  לשוות ל- $a$  וגם לא מ- $f$  אך שניהם לא יכולים להיות שוים ל- $a$  כי לפי אקסיומה 3 כל האיברים ביחס  $M$  חיבים להיות שונים זה מזה.

נביט באקסיומה 5: נובע כי  $d \sqsubseteq a$ . אבל אין מניעה מ- $d$  לשוות ל- $b$  או ל- $c$ .

לכן נקבל מודל בן ארבעה איברים:  
 $U = \{a, b, c, d\}, L = \{(a, b), (a, c)\}, M = \{(a, b, c), (b, a, d)\}$   
 זה מקים את הדרוש.

כמו כן נקבל מודל בן חמשה איברים:  
 $U = \{a, b, c, d, e\}, L = \{(a, b), (a, c)\}, M = \{(a, b, c), (d, a, e)\}$   
 מודל זה מקים את הדרוש.

וכמו כן נקבל מודל בן ששה איברים:  
 $U = \{a, b, c, d, e, f\}, L = \{(a, b), (a, c)\}, M = \{(a, b, c), (d, e, f)\}$   
 מודל זה מקים את הדרוש.

נוסיף כעת את אקסיומה 6. נובע כי  $L(a, b) \sqsubseteq (\neg M(b, a, d))$ . לכן המודל בן ארבע האיברים נופל. לכן נותרים המודל בן 5 האיברים והמודל בן 6 האיברים.

נוסיף כעת את אקסיומה 7. נובע כי  $M(d, a, e) \sqsubseteq (\neg L(a, b))$ . לכן המודל בן חמשת האיברים נופל. לכן נותר המודל בן 6 האיברים, ומודלים יותר גדולים.



כעת נענה על השאלות: ח-כן, ט-לא כי המודל המינימלי הוא בן ארבעה איברים, י-לא מתקים במודל בן ארבעת האיברים, כיון אין אבר שמתיחס לכל האיברים על ידי היחס  $L$ . יא-לא, כי במודל בן ארבעת האיברים מתקים  $M(b,a,d)$  אבל לא מתקים  $L(b,a)$ . יב-לא כי לא מתקים במודל בן ארבעת האיברים. יג-לא, כי הוא סותר את אקסיומה 1, יד-ד, כי המודל המינימלי הוא בן ארבעה איברים. טו-כן, טז-כן כיון שהמודל המינימלי הוא בן חמשה איברים, יז, יח, יט, כ לא מתקיימים במודל בן חמשת האיברים ולכן התשובה היא לא, כא-ה.

כב-כן, כג-לא, כי המודל המינימלי הוא בן ששה איברים. כד, כה, כו, כז לא מתקיימים במודל בן ששת האיברים. כח-ו.

לכן נסכם: א-כן, ב-כן, ג-לא, ד-לא, ה-לא, ו-לא, ז-ג.  
ח-כן, ט-לא, י-לא, יא-לא, יב-לא, יג-לא, יד-ד, טו-כן, טז-כן, יז-לא, יח-לא, יט-לא, כ-לא, כא-ה, כב-כן, כג-לא, כד-לא, כה-לא, כן-לא, כז-לא, כח-ו.

חלוקה לטורים:

טור – א : א, ג, ה, ז, ט, יא, יג, יד, טו, יח, יט, כא, כב, כה, כו, כח.

א-כן, ג-לא, ה-לא, ז-ג, ט-לא, יא-לא, יג-לא, יד-ד, טו-כן, יח-לא, יט-לא, כא-ה, כב-כן, כה-לא, כו-לא, כח-ו.

כן, לא, לא, ג, לא, לא, לא, ד, כן, לא, לא, ה, כן, לא, לא, ו.

טור – ב: ב, ד, ו, ז, ח, י, יב, יד, טז, יז, כ, כא, כג, כד, כז, כח.

ב-כן, ד-לא, ו-לא, ז-ג, ח-כן, י-לא, יב-לא, יד-ד, טז-כן, יז-לא, כ-לא, כא-ה, כג-לא, כד-לא, כז-לא, כח-ו.

כן, לא, לא, ג, כן, לא, לא, ד, כן, לא, לא, ה, לא, לא, ו.

הסבר לפני שאלה 3 .

נניח כי שאלנו שאילתא את המחשב וקבלנו תשובות שכאלו:

```
X=a.  
;  
X=b.  
;  
X=c.  
;  
No
```

אז , בשאלה 3, התשובה הראשונה היא a , התשובה השניה היא b , התשובה השלישית היא c , התשובה הרביעית היא No , התשובה החמישית היא No , התשובה השישית היא No וכדומה.

שאלה 3

טור א

הבט בקוד הפרולוג הבא

```
ya(a,b).%1  
ya(a,c).%2  
ya(a,d).%3  
ya(a,e).%4  
ya(b,f).%5  
ya(b,g).%6  
ya(c,h).%7  
ya(c,i).%8  
yag(X,Y):-ya(X,Y).%9  
yag(X,Y):-yag(X,Z),ya(Z,Y).%10
```

הבט בשאילתא  $?-yag(X,Y)$  והרץ אותה במחברתך.

ענה על השאלות הבאות בגוף השאלון.

א. התשובה הראשונה היא:

ב. התשובה השניה היא:

ג. התשובה השלישית היא:

ד. התשובה הרביעית היא:

ה. התשובה החמישית היא:

ו. התשובה השישית היא:

ז. התשובה השביעית היא:

ח. התשובה השמינית היא:

ט. התשובה התשיעית היא:

י. התשובה העשירית היא:

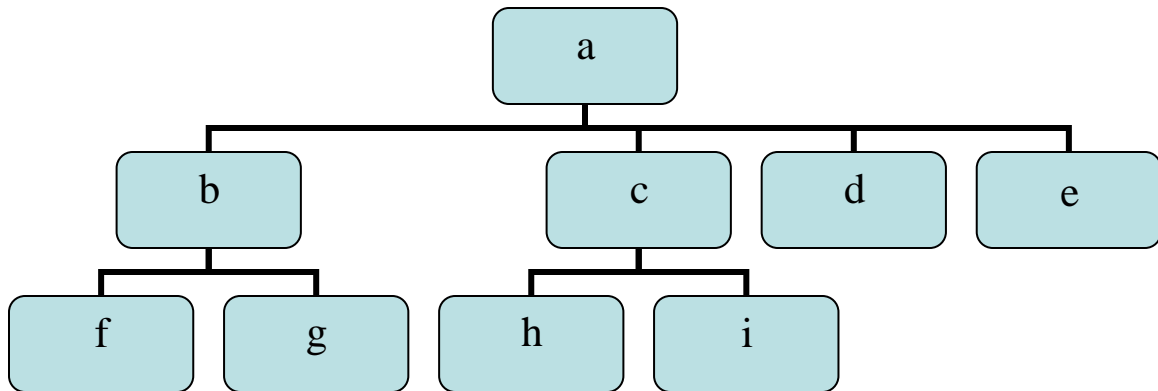
יא. התשובה האחד עשר היא:

יב. התשובה השנים עשר היא:

יג: מספר הלולאות הפתוחות בזמן מתן התשובה האחרונה הוא:

תשובה לשאלה 3:

נציר את היחס  $ya$  בטבלה הבאה:



וכשמריצים את השאילתא, היא עוצרת בשורה 9, ומתחילה את השאילתא ya אשר עוברת על הרשימה שבגוף התכנית. לכן 8 התשובות הראשונות הן פשוט לעבור על רשימת הקלט:

$$X=a, Y=b-\text{א}$$

$$X=a, Y=c-\text{ב}$$

$$X=a, Y=d-\text{ג}$$

$$X=a, Y=e-\text{ד}$$

$$X=b, Y=f-\text{ה}$$

$$X=b, Y=g-\text{ו}$$

$$X=c, Y=h-\text{ז}$$

$$X=c, Y=i-\text{ח}$$

לאחר ; יורדת השאילתא הראשונה לשורה 10. היא מתורגמת לשתי שאילתות. הראשונה מביניהן יורדת לשורה 9, ומתורגמת לשאילתת ya ולכן שתי השאילתות שתענינה כלפי המשתמש הופכות להיות  $ya(X,Z), ya(Z,Y)$  ולכן התשובות הבאות הן:

$$X=a, Y=f\text{-ט}$$

$$X=a, Y=g\text{-י}$$

$$X=a, Y=h\text{-יא}$$

$$X=a, Y=i\text{-יב}$$

יג-פתוחות שתי לולאות.

חלוקה לטורים:

טור א-א, ג, ה, ז, ט, יא, יג.

תשובות (משמאל לימין: השמאלית ביותר היא התשובה הראשונה):

$$X=a, Y=b, \quad X=a, Y=d, \quad X=b, Y=f, \quad X=c, Y=h, \quad X=a, Y=f, \\ X=a, Y=h.$$

יג-2.

טור ב-ב, ד, ו, ח, י, יב, יג.

תשובות (משמאל לימין: השמאלית ביותר היא התשובה הראשונה):

$$X=a, Y=c, \quad X=a, Y=e, \quad X=b, Y=g, \quad X=c, Y=i, \quad X=a, Y=g, \\ X=a, Y=i.$$

יג-2.